Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Ana i Vanja stoje zajedno kraj željezničke pruge i čekaju da prođe vlak koji vozi stalnom brzinom. U trenutku kad prednji kraj vlaka dođe do njih, Ana krene stalnom brzinom u smjeru kretanja vlaka, a Vanja istom brzinom u suprotnom smjeru. Svaka od njih se zaustavlja u trenutku kad stražnji kraj vlaka prođe kraj nje. Ana je ukupno prošla 45 metara, a Vanja 30 metara. Koliko je dugačak vlak?

2. U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su prirodni brojevi, a polumjer upisane kružnice iznosi 4. Odredi sve moguće vrijednosti duljina kateta tog trokuta.

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2}+\frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2}<4.$$

4. Neka je $k>1$ prirodan broj. Dano je $k+2$ međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od $3k+1$. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika veća od k i manja od $2k$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC vrijedi $|AB|=|AC|$ i $\sphericalangle BAC<60^\circ$. Neka je točka D na dužini $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BAC$, neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{BD}$ i paralele s BC kroz točku A te neka je F točka na pravcu AC takva da se A nalazi između C i F i vrijedi $|AF|=2|AC|$.

(a) Dokaži da su pravci BE i AC paralelni.

(b) Dokaži da se okomica iz F na AB i okomica iz E na AC sijeku na pravcu BD.

U (b) dijelu zadatka dozvoljeno je korištenje tvrdnje iz (a) čak i ako nije dokazana.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)$$

realni.

2. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\left\lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \frac{x(3x+1)}{2(x+2)}.$$

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od t.
Na primjer, ako je $t = 3.14$, onda je $\lfloor t \rfloor = 3$.

3. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.

U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

4. Odredi sve parove (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi $m^2 = n^5 + n^4 + 1$, a broj $m - 7n$ dijeli $m - 4n$.

5. Ukrug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja;
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane

(a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?

(b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Dan je trokut ABC takav da je $|AB| = 4, |BC| = 7, |AC| = 5$. Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$. Izračunaj
$$\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2}.$$

2. Četvorku prirodnih brojeva (a, b, c, d) zovemo *zelenom* ako vrijedi
$$b = a^2 + 1, \quad c = b^2 + 1, \quad d = c^2 + 1$$
i $D(a) + D(b) + D(c) + D(d)$ je neparan, pri čemu je $D(k)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja k.

Koliko ima zelenih četvorki čiji su svi članovi manji od $1\,000\,000$?

3. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima.

Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1} + \frac{b^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2b-1} + \frac{c^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2c-1} \leqslant 3.$$

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC takav da je $|BC| < |CA| < |AB|$. Neka su D, E i F redom nožišta njegovih visina iz vrhova A, B i C. Pravac točkom F paralelan s DE siječe pravac BC u točki M, a simetrala kuta $\sphericalangle MFE$ siječe pravac DE u točki N.

Dokaži da je točka F središte kružnice opisane trokutu DMN ako i samo ako je točka B središte kružnice opisane trokutu FMN.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)(x-a^4)$$

realni.

2. Rudi i Miljen igraju igru na školskoj ploči naizmjence odigravajući poteze. Igrač koji je na potezu bira dva relativno prosta broja napisana na ploči, briše ih te zapisuje na ploču njihov zbroj. Gubi igrač koji to ne može napraviti. Igru započinje Rudi. Dokaži da Miljen ima pobjedničku strategiju ako je na početku na ploči bilo napisano

(a) 2019 jedinica;

(b) 2020 jedinica.

3. Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n,

$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j, k vrijedi

$$(i-j)M_k + (j-k)M_i + (k-i)M_j = C,$$

dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D, E i F nožišta visina trokuta ABC iz vrhova A, B i C, redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P. Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R. Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle NQP + \sphericalangle NRP < 180°$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

5. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta.

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$

- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Za međusobno različite realne brojeve a i b vrijedi

$$a + 9 = (b - 3)^2 \quad \text{i} \quad b + 9 = (a - 3)^2.$$

Koliko iznosi $a^2 + b^2$?

2. Odredite skup svih cijelih brojeva n za koje vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2019^2 - 1}\right) < \frac{2019}{n^2}.$$

3. Na koliko se načina broj 455 može zapisati kao zbroj rastućeg niza od dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva?

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.

5. U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina hipotenuze je 12. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $ACGF$. Ako točke D, E, F i G leže na istoj kružnici, izračunajte opseg trokuta ABC.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Koliko je $1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019}$, ako je $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$?

2. U trokutu ABC je $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|BC| = 25\,\text{cm}$, $|CA| = 17\,\text{cm}$. Trokutu je upisan pravokutnik $KLMN$ tako da su vrhovi M i N na stranici $\overline{BC}$, vrh K na stranici $\overline{AB}$, a vrh L na stranici $\overline{CA}$.

Odredite duljine stranica pravokutnika ako je njegova površina jednaka $\dfrac{216}{5}$.

3. U trokutu ABC je $|BC| = 2\,\text{cm}$, $|AC| = 3\,\text{cm}$ i $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB$.

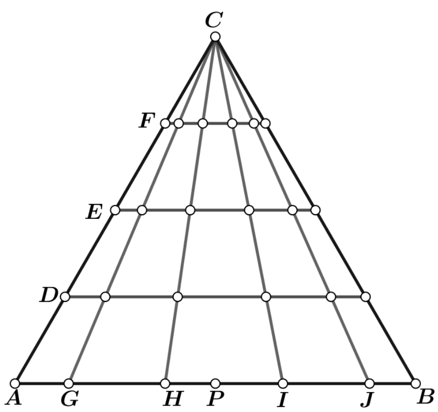
Ako je kut između težišnice i visine povučene iz vrha C jednak ω, koliko je $\cos 2\omega$?

4. Neka je $f(x) = |x-4|\,(|x|-2)$.

Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije f na intervalu $[-2, 5]$. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja?

5. U jednakostraničnom trokutu ABC polovište stranice $\overline{AB}$ je točka P. Točke G i H su između točaka A i P, a točke I i J između točaka P i B. Točke D, E i F dijele dužinu $\overline{AC}$ na četiri jednaka dijela. Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{AB}$. Promatramo sve trokute kojima je jedan vrh u točki C, a preostala dva na jednoj od konstruiranih paralela sa stranicom $\overline{AB}$, uključujući $\overline{AB}$ i to u točkama presjeka sa spojnicama AC, GC, HC, IC, JC ili BC.

Ako je ukupan broj takvih trokuta jednak x, a ukupan broj takvih trokuta koji ne sadrže težište T jednak y, odredite omjer $x : y$.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{4^x + 1} \geqslant \left|4^{x-1} - 1\right| + 4^x \log_x \sqrt{x}$$

u skupu realnih brojeva.

2. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od $60°$. Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha A u trokutu ABC.

3. Dokažite da vrijednost funkcije $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ nije u intervalu $\left\langle \frac{1}{9}, \frac{3}{2} \right\rangle$ niti za jedan realni broj x za koji je funkcija definirana.

4. Klara je čekajući u redu za ulaznice kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999.

Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Klara takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

5. Ako unutar trokuta ABC postoji točka P takva da je

$$\sphericalangle PAB = 10°, \quad \sphericalangle PBA = 20°, \quad \sphericalangle PCA = 30°, \quad \sphericalangle PAC = 20°,$$

dokažite da je trokut ABC jednakokračan.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2. Realne funkcije $f \circ g$ i f zadane su pravilima pridruživanja

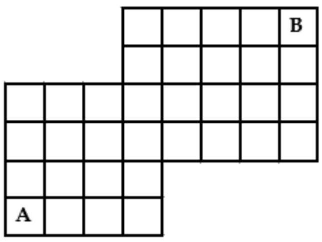
$$(f \circ g)(x) = 2^{4^{4^{\sin x}}} \qquad \text{i} \qquad f(x) = 4^{8^{-2^x}}.$$

Odredite pravilo pridruživanja kojim je zadana funkcija g i njezino područje definicije.

3. Odredite sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 - xy + y^2 = 2x - y.$$

4. Na igraćoj ploči prikazanoj na slici Ivan treba doći od polja A do polja B. Pritom iz pojedinog polja smije prijeći samo na polje koje je neposredno desno ili neposredno iznad njega. Na koliko načina Ivan može doći od polja A do polja B?



5. Duljina brida kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iznosi a. Odredite udaljenost od polovišta P brida $\overline{BC}$ do pravca koji prolazi vrhom A i središtem S stranice $A_1B_1C_1D_1$. Kolika je površina presjeka kocke ravninom APS ?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak A-1.1.

Ana i Vanja stoje zajedno kraj željezničke pruge i čekaju da prođe vlak koji vozi stalnom brzinom. U trenutku kad prednji kraj vlaka dođe do njih, Ana krene stalnom brzinom u smjeru kretanja vlaka, a Vanja istom brzinom u suprotnom smjeru. Svaka od njih se zaustavlja u trenutku kad stražnji kraj vlaka prođe kraj nje. Ana je ukupno prošla 45 metara, a Vanja 30 metara. Koliko je dugačak vlak?

Prvo rješenje.

Uočimo, Ana je prošla $45 - 30 = 15$ metara više od Vanje, a dok je Ana prolazila tih 15 metara, vlak je prošao $45 + 30 = 75$ metara.

Prema tome, brzina vlaka je $\frac{75}{15} = 5$ puta veća od brzine hoda.

Uočimo, dok je Vanja hodala 30 metara, vlak je za to vrijeme prošao $30 \cdot 5 = 150$ metara.

Budući da je Vanja počela hodati u trenutku kad je prednji kraj vlaka prošao kraj nje, a zaustavila se kad je stražnji kraj prošao, te da je hodala u suprotnom smjeru, ukupna duljina vlaka je $150 + 30 = 180$ metara.

Drugo rješenje.

U trenutku kada stražnji kraj prođe Vanju, obje su prošle jednak put od 30 metara, odnosno ukupna udaljenost između njih u tom trenutku je 60.

S druge strane, budući da su obje počele hodati u istom trenutku i istom brzinom, u trenutku kad stražnji kraj vlaka prođe Vanju, ispred Ane je prošlo $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ vlaka.

Prema tome, između njih je $\frac{1}{3}$ vlaka, a duljina te trećine je 60 metara. Iz toga slijedi da je duljina vlaka $3 \cdot 60 = 180$ metara.

Treće rješenje.

Označimo s l duljinu vlaka, s v brzinu vlaka, a s h brzinu hoda.

Ana je prošla 45 metara u $\frac{45}{h}$ vremena. S druge strane, vlak je za to vrijeme prošao $l + 45$ metara brzinom v, pa vrijedi

$$\frac{l+45}{v} = \frac{45}{h}, \text{ odnosno } \frac{v}{h} = \frac{l+45}{45}.$$

Slično, Vanja je prošla 30 metara u $\frac{30}{h}$ vremena, a vlak je za to vrijeme prošao $l - 30$ metara, pa vrijedi

$$\frac{l-30}{v} = \frac{30}{h}, \text{ odnosno } \frac{v}{h} = \frac{l-30}{30}.$$

Izjednačavanjem tih jednakosti imamo $\dfrac{l+45}{45} = \dfrac{l-30}{30}$, odakle slijedi $l = 180$ metara.

Zadatak A-1.2.

U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su prirodni brojevi, a polumjer upisane kružnice iznosi 4. Odredi sve moguće vrijednosti duljina kateta tog trokuta.

Prvo rješenje.

Označimo katete pravokutnog trokuta s a i b, hipotenuzu s c te radijus upisane kružnice s r. Izjednačavanjem formula za površinu pravokutnog trokuta dobivamo

$$\begin{aligned} &r \cdot \frac{a+b+c}{2} = P = \frac{ab}{2} \\ &ab - 4a - 4b = 4c. \end{aligned}$$

Kvadriranjem zadnje jednakosti, pa primjenom Pitagorinog poučka dalje slijedi

$$\begin{aligned} &(ab-4a-4b)^2 = 16c^2 \\ &(ab-4a-4b)^2 = 16a^2+16b^2 \\ &a^2b^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab = 0 \\ &ab(ab-8a-8b+32) = 0. \end{aligned}$$

Kako su a i b stranice trokuta, moraju biti pozitivne pa zadnju jednakost možemo podijeliti s ab te dobivamo jednadžbu

$$ab - 8a - 8b + 32 = 0, \tag{1}$$

koju faktoriziranjem možemo zapisati u obliku

$$(a-8)(b-8) = 32.$$

Kako su a i b cjelobrojni, zaključujemo da brojevi $a-8$ i $b-8$ moraju biti djelitelji broja 32. Preostaje provjeriti 12 mogućnosti, od kojih njih 6 možemo preskočiti uz pretpostavku da je a manji od b. Dakle, promatramo mogućnosti:

$$\begin{aligned} a-8 &= -32 \qquad & a-8 &= 1 \\ a-8 &= -16 & a-8 &= 2 \\ a-8 &= -8 & a-8 &= 4 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu i uzimajući u obzir da a mora biti pozitivan zaključujemo da sljedeći parovi kateta zadovoljavaju uvjete zadatka

$$(9,40),(10,24),(12,16),(16,12),(24,10),(40,9).$$

Za svaki taj par, izračunamo c koristeći Pitagorin poučak, te provjerimo da je $\dfrac{ab}{a+b+c} = 4$.

Drugo rješenje.

Označimo katete pravokutnog trokuta s a i b, hipotenuzu s c te radijus upisane kružnice s r. Neka su A', B', C' dirališta upisane kružnice sa stranicama a, b, c, redom te neka je S središte upisane kružnice.

Uočimo da četverokut $CA'SB'$ ima tri prava kuta i dvije stranice jednake, jer su to radijusi upisane kružnice, pa zaključujemo da je $CA'SB'$ kvadrat sa stranicom duljine r. Njegova površina je $P_1 = r^2$.

Trokuti $AC'S$ i $AB'S$ su sukladni (po S–S–K poučku o sukladnosti, jer su oba pravokutni, dijele hipotenuzu i oba imaju jednu katetu r) pa je njihova ukupna površina $P_2 = 2 \cdot \frac{r(b-r)}{2} = r(b-r)$.

Analogno pokažemo da ukupna površina trokuta $BC'S$ i $BA'S$ iznosi $P_3 = r(a-r)$.

Za površinu trokuta ABC vrijedi $P = P_1 + P_2 + P_3$ i formula za površinu pravokutnog trokuta je $P = \frac{ab}{2}$, pa izjednačavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{2} = 4^2 + 4(a-4) + 4(b-4) \\
&ab - 8a - 8b + 32 = 0.
\end{aligned}$$

Budući da smo dobili jednadžbu (1) dalje postupamo kao u prvom rješenju.

Treće rješenje.

Označimo katete pravokutnog trokuta s a i b, hipotenuzu s c te radijus upisane kružnice s r. Neka su A', B', C' dirališta upisane kružnice sa stranicama a, b, c, redom te neka je S središte upisane kružnice.

Uočimo da četverokut $CA'SB'$ ima tri prava kuta i dvije stranice jednake, jer su to radijusi upisane kružnice, pa zaključujemo da je $CA'SB'$ kvadrat sa stranicom duljine r.

Trokuti $AC'S$ i $AB'S$ su sukladni (po S–S–K poučku o sukladnosti, jer su oba pravokutni, dijele hipotenuzu i oba imaju jednu katetu r) pa je $|AC'| = |AB'| = b - r$.

Analogno pokažemo da su trokuti $BC'S$ i $BA'S$ sukladni te da vrijedi $|BC'| = |BA'| = a - r$.

Ovime smo pokazali da je $c = a+b-2r = a+b-8$, pa primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$\begin{aligned}
&(a+b-8)^2 = a^2 + b^2 \\
&64 + 2ab - 16a - 16b = 0 \\
&ab - 8a - 8b + 32 = 0
\end{aligned}$$

Budući da smo dobili jednadžbu (1) dalje postupamo kao u prvom rješenju.

Zadatak A-1.3.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2} + \frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2} + \frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2} < 4.$$

Rješenje.

Brojevi a, b i c su pozitivni i vrijedi $a+b+c=1$, pa se svi moraju nalaziti u intervalu $(0,1)$. Iz toga slijedi da je $a^2<a$, $b^2<b$ i $c^2<c$.

Stoga je

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}<\frac{1+9a^2}{1+2a^2+2b^2+2c^2},$$

i analogno

$$\frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2}<\frac{1+9b^2}{1+2a^2+2b^2+2c^2} \quad \text{i} \quad \frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2}<\frac{1+9c^2}{1+2a^2+2b^2+2c^2}.$$

Uz oznaku $S=a^2+b^2+c^2$, zbrajanjem gornjih nejednakosti dobijemo

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2}+\frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2}<\frac{3+9S}{1+2S}. \tag{2}$$

Budući da je $S=a^2+b^2+c^2<a+b+c=1$, slijedi

$$\frac{3+9S}{1+2S}<\frac{4+8S}{1+2S}=4. \tag{3}$$

Konačno, iz (2) i (3) slijedi tražena nejednakost.

Zadatak A-1.4.

Neka je $k>1$ prirodan broj. Dano je $k+2$ međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od $3k+1$. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika veća od k i manja od $2k$.

Prvo rješenje.

Označimo sa S skup odabranih $k+2$ brojeva. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti ds je 1 u skupu S. Zaista, ako se broj 1 ne nalazi u skupu S, svim elementima iz S možemo oduzeti vrijednost najmanjeg elementa skupa S i dodati 1, pritom će razlika između svaka dva elementa ostati sačuvana.

Ako se u skupu S nalazi barem jedan broj b iz skupa $\{k+2,k+3,\dots,2k\}$, onda za brojeve 1 i b vrijedi tvrdnja zadatka.

Pretpostavimo zato da niti jedan od brojeva $k+2,k+3,\dots,2k$ nije u S. Sve brojeve od 2 do $3k+1$ možemo podijeliti u k parova $(2,2k+1),\dots,(k+1,3k)$. Osim broja 1, u skupu S nalazi se još $k+1$ brojeva, pa prema Dirichletovom principu postoji par koji sadrži dva broja iz S. Ta dva broja zadovoljavaju tvrdnju zadatka.

Drugo rješenje.

Zapišimo odabrane brojeve u uzlaznom poretku, neka su to $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+2} \leqslant 3k$. Tada vrijedi $a_{k+2} - a_1 > k$. Ako je $a_{k+2} - a_1 < 2k$, onda su a_1 i a_{k+2} traženi brojevi. Stoga pretpostavimo da je $a_{k+2} - a_1 \geqslant 2k$.

Neka je i najveći indeks takav da vrijedi $a_{k+2} - a_i \geqslant 2k$.

Uočimo da vrijedi $a_{j+1} - a_j \leqslant 2k - 1$ za svaki indeks $j = 1, 2, \ldots, k + 1$. U suprotnom, zbog $a_j \geqslant j$ i $a_{k+2} \geqslant a_{j+1} + (k + 2 - j - 1)$ vrijedilo bi

$$a_{k+2} \geqslant a_{j+1} + (k + 2 - j - 1) > a_j + 2k - 1 + (k + 2 - j - 1) \geqslant 3k,$$

što je nemoguće.

Posebno, vrijedi $a_{k+2} - a_{k+1} \leqslant 2k - 1$, iz čega slijedi $i < k + 1$.

Također, prema definiciji indeksa i vrijedi $a_{k+2} - a_{i+1} < 2k$. Ako je $a_{k+2} - a_{i+1} > k$, onda su a_{k+2} i a_{i+1} traženi brojevi.

Petpostavimo zato da je $a_{k+2} - a_{i+1} \leqslant k$. U tom slučaju, zbog $a_{k+2} - a_i \geqslant 2k$ slijedi $a_{i+1} - a_i \geqslant k$. Ako je $a_{i+1} - a_i > k$. Tada, zbog $a_{i+1} - a_i \leqslant 2k - 1 < 2k$ vrijedi da su a_{i+1} i a_i traženi brojevi.

Ako je $a_{i+1} - a_i = k$, onda imamo

$$k \geqslant a_{k+2} - a_{i+1} = a_{k+2} - a_i - k \geqslant 2k - k = k,$$

pa slijedi $a_{k+2} - a_{i+1} = k$.

Pretpostavimo da vrijedi $i < k$. Tada postoji ℓ takav da je $i + 1 < \ell < k + 2$. Tada je $a_\ell - a_i > a_{i+1} - a_i = k$ i $a_\ell - a_i < a_{k+2} - a_i \leqslant 2k$, pa su a_i i a_ℓ traženi brojevi.

Ako vrijedi $i+1 = k+1$, tada je $a_{k+2} - a_{k+1} = k$ i $a_{k+2} - a_k = 2k$. Budući da je $a_k + 2k = a_{k+2} \leqslant 3k$, tj. $a_k \leqslant k$, a vrijedi i $a_k \geqslant k$, zaključujemo da je $a_k = k$. Sada je $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k = k$, pa mora biti $a_j = j$ za sve $j = 1, 2, \ldots, k$. Također, vrijedi $a_{k+1} = 2k$ i $a_{k+2} = 3k$. Sada su traženi brojevi, na primjer, a_1 i a_{k+1}.

U svim slučajevima smo pronašli traženi par brojeva, pa je time tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak A-1.5.

U jednakokračnom trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$ i $\sphericalangle BAC < 60°$. Neka je točka D na dužini $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BAC$, neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{BD}$ i paralele s BC kroz točku A te neka je F točka na pravcu AC takva da se A nalazi između C i F i vrijedi $|AF| = 2|AC|$.

(a) Dokaži da su pravci BE i AC paralelni.

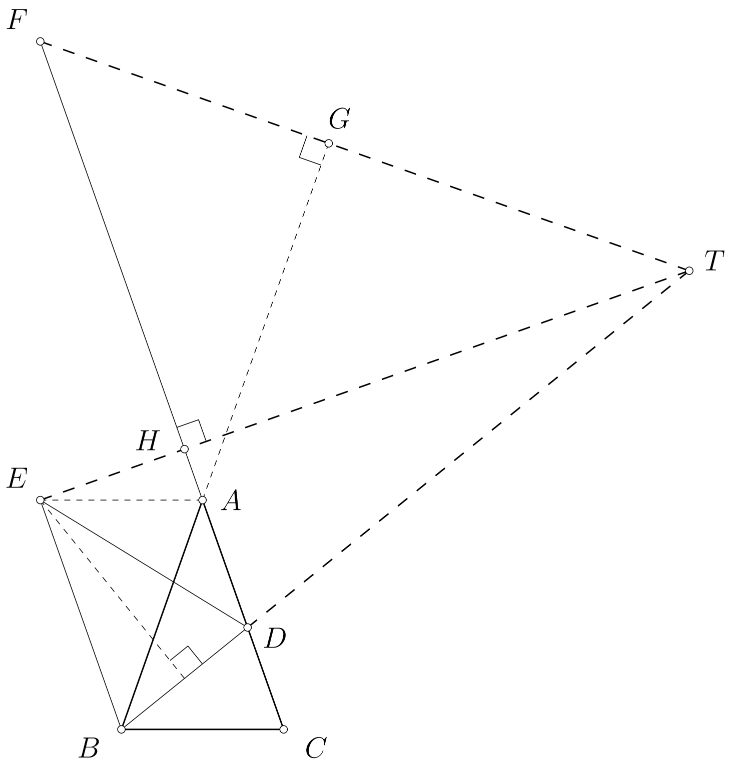
(b) Dokaži da se okomica iz F na AB i okomica iz E na AC sijeku na pravcu BD.

U (b) dijelu zadatka dozvoljeno je korištenje tvrdnje iz (a) čak i ako nije dokazana.

Prvo rješenje.

(a) Budući da je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BAC$, te $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA$, trokuti BDC i ABC su slični. Slijedi da je $|BD| = |BC|$. Neka je $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CBD$ i $\beta = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB$.

Neka je točka E' takva da je $AE'BC$ paralelogram. Slijedi da je $\sphericalangle ABE' = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CBD$, pa je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBD + \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE' + \sphericalangle ABD = \sphericalangle E'BD$. Budući da je i $|BE'| = |AC|$, po S–K–S poučku, slijedi da su trokuti $E'BD$ i ABC sukladni. Dakle, trokut $E'BD$ je jednakokračan, pa E' leži na simetrali stranice $\overline{BD}$. Budući da su točke E i E' obje na paraleli kroz točku A s BC, zaključujemo da se podudaraju. Dakle, $AEBC$ je paralelogram i pravci AC i BE su paralelni.



(b) Neka je P polovište dužine $\overline{BC}$. Budući da je prema (a) dijelu $AEBC$ paralelogram, slijedi da je $|BC| = |AE|$. Zato je $|AE| : |CP| = 2 : 1 = |AF| : |CA|$. Prema S–K–S teoremu slijedi da su trokuti CAP i AFE slični. Zato je $\sphericalangle DFE = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Budući da je polovište u jednakokračnom trokutu ujedno i nožište visine, vrijedi $\sphericalangle APC = 90°$. pa je i $\sphericalangle AEF = 90°$.

Neka je G nožište okomice iz F na pravac AB, a H nožište okomice iz E na pravac AC. Neka je točka T presjek pravaca EH i FG. Treba pokazati da T leži na BD.

Prema dokazu (a) dijela trokuti EBD i ABC su slični, pa vrijedi

$$\sphericalangle ADE = 180° - \sphericalangle BDE - \sphericalangle BDC = 180° - \sphericalangle ACB - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC.$$

Uočimo da je

$$\sphericalangle DFT = 90° - \sphericalangle FAG = 90° - \sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle ADE = \sphericalangle DEH = \sphericalangle DET.$$

Dakle, $DEFT$ je tetivni četverokut, pa je $\sphericalangle DTE = \sphericalangle DFE = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$.

Slijedi da je $\sphericalangle TDH = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, dok je $\sphericalangle BDH = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, pa su B, D, T kolinearne točke.

Napomena: Alternativno, možemo uvesti točku E' na paraleli s BC kroz A tako da je $AE'BD$ tetivni četverokut. Tada je $\sphericalangle BDE' = \sphericalangle BAE' = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BE'D = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC$. Dakle, trokut $E'BD$ ima iste kutove kao ABC. Dakle, točka E' leži na simetrali dužine $\overline{BD}$, pa je $E = E'$. Sada slijedi da je $\sphericalangle EBC = \sphericalangle EBD + \sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BCD$, pa je $AEBC$ paralelogram, tj. pravci AC i BE su paralelni.

Drugo rješenje.

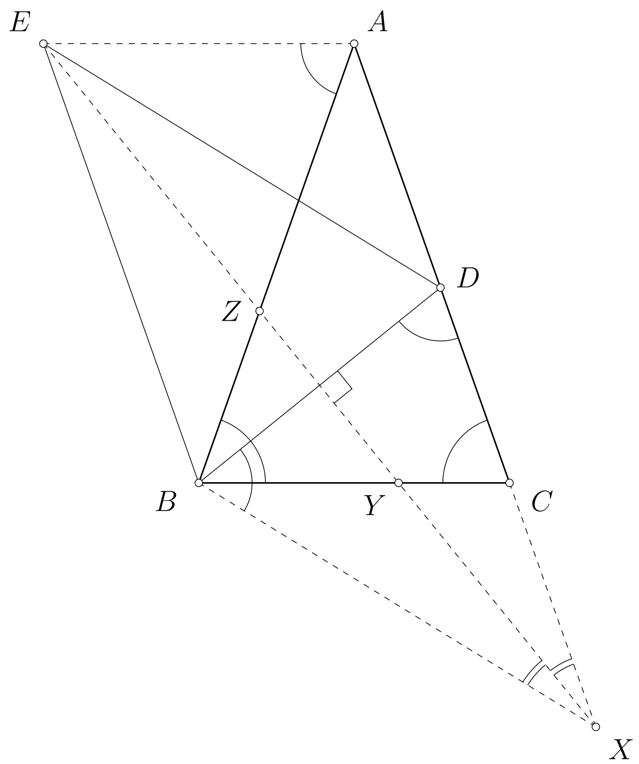
(a) Neka je O ortocentar trokuta ABC. Uočimo da je O ujedno i središte opisane kružnice trokuta BCD. Primjetimo da je zbog obodnog i središnjeg kuta $\sphericalangle EOB = \frac{1}{2}\sphericalangle DOB = \sphericalangle DCB = \sphericalangle EAB$ iz čega slijedi da je četverokut $AEBO$ tetivan. Iz toga dobivamo da je $\sphericalangle AEB = 180^\circ - \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$ gdje zadnja jednakost vrijedi jer je O ortocentar trokuta ABC. A kako je $AE \parallel BC$ dobivamo traženu tvrdnju.

(b) Kao u prvom rješenju.

Treće rješenje.

(a) Neka je $a = |BC| = |BD|$, $b = |AB| = |AC|$, $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CBD$ i $\beta = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BDC$. Tada je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA - \sphericalangle CBD = \beta - \alpha$.

Neka je X točka na polupravcu AC takva da je $\sphericalangle XBC = \sphericalangle DBA = \beta - \alpha$. Tada je $\sphericalangle XBD = \sphericalangle XBC + \sphericalangle CBD = \beta = \sphericalangle BDX$. Budući da je $|BD| = |BC|$, jednakokračni trokuti XBD i ABC su sukladni i vrijedi $|XD| = |XB| = b$.



Jednakokračni trokuti ABC i BCD su slični, pa je $|AC| : |BD| = |BC| : |CD|$, odakle dobivamo $|CD| = \dfrac{a^2}{b}$. Sada zaključujemo da je

$$|XC| = |XD| - |CD| = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Jednakokračni trokuti EBD i XBD imaju zajedničku osnovicu $\overline{BD}$, stoga je njezina simetrala XE ujedno i simetrala kuta $\sphericalangle DXB$.

Označimo s Y i Z redom točke u kojima pravac XE siječe dužine $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$.

Prema poučku o simetrali kuta u trokutu XBC imamo:

$$\frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|YB|}{|YC|} = \frac{|YB|}{|BC|-|YB|} = \frac{|YB|}{a-|YB|},$$

pa je $|YB| = \frac{ab^2}{2b^2-a^2}$.

Nadalje, prema poučku o simetrali kuta u trokutu XBA imamo:

$$\frac{|ZB|}{|ZA|} = \frac{|XB|}{|XA|} = \frac{|XB|}{|XC|+|CA|} = \frac{b}{\frac{b^2-a^2}{b}+b} = \frac{b^2}{2b^2-a^2}.$$

Budući da je AB presječnica paralelnih pravaca AE i BC, trokuti AEZ i BYZ su slični, te je $|AE| : |BY| = |AZ| : |BZ|$, odakle je

$$|AE| = \frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot |BY| = \frac{2b^2-a^2}{b^2} \cdot \frac{ab^2}{2b^2-a^2} = a = |BC|.$$

Zato je četverokut $BCAE$ paralelogram, odnosno $BE \parallel CA$.

(b) Kao u prvom rješenju.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)$$

realni.

Prvo rješenje.

Svaki realni broj a zadovoljava traženi uvjet, stoga pretpostavimo nadalje da a nije realan broj.

Ako je z nultočka polinoma s realnim koeficijentima, tada je i $\overline{z}$ nultočka tog polinoma. Budući da je polinom $P(x)$ trećeg stupnja, mora imati barem jednu realnu nultočku, pa zato imamo samo dva slučaja: ili je $\overline{a} = a^2$ ili je $\overline{a} = a^3$.

Ako je $\overline{a} = a^2$, onda je $|a| = |a|^2$, pa budući da je $a \neq 0$ slijedi $|a| = 1$. Nadalje, dobivamo $a^3 = a^2 \cdot a = \overline{a} \cdot a = |a|^2 = 1$. Za takve a imamo

$$\overline{a} = a^3\overline{a} = a^2|a|^2 = a^2.$$

Dakle, brojevi a i a^2 čine konjugirano kompleksni par, a $a^3 = 1$ je realan broj, pa zaključujemo da polinom $P(x)$ ima realne koeficijente. Iz $a^3 = 1$ slijedi $(a-1)(a^2+a+1) = 0$, a kako a nije realni broj, vrijedi $a^2 + a + 1 = 0$. Rješenja te jednadžbe su

$$a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{i} \qquad a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ako je $\overline{a} = a^3$, na sličan način pokazujemo da vrijedi $a^4 = 1$. Odavde je $a = \pm i$, budući da realna rješenja ne promatramo. Direktnom provjerom vidimo da obje mogućnosti za a zadovoljavaju uvjete zadatka:

$$P(x) = (x \mp i)(x+1)(x \pm i) = (x^2+1)(x+1) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Dakle, svi kompleksni brojevi koji zadovoljavaju traženi uvjet su svi realni brojevi a te

$$a \in \left\{ i, -i, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, svi realni brojevi su rješenja pa pretpostavimo da a nije realan broj.

Neka je $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, računamo:

$$\begin{aligned}
&A = -a - a^2 - a^3 = -a(1 + a + a^2),\\
&B = a^3 + a^4 + a^5 = a^3(1 + a + a^2),\\
&C = -a^6.
\end{aligned}$$

Ako je $A = 0$, onda je $1 + a + a^2 = 0$ jer a nije realni broj. Istom provjerom kao u prvom rješenju, dolazimo do zaključka da su oba kompleksna treća korijena iz jedinice rješenja. Oni iznose

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ako $A \neq 0$, onda je $a^2 = -\dfrac{B}{A}$ realni broj. Tada iz $A = -a - a^2 - a^3$ dobivamo

$$A + a^2 = -a \cdot (1 + a^2).$$

Ako $a^2 \neq -1$, tada iz gornje jednakosti vidimo i da je a realan broj kao omjer dva takva, što je suprotno pretpostavci. Dakle, $a^2 = -1$, pa je $a = \pm i$. Direktnom provjerom kao u prvom rješenju vidimo da obje mogućnosti za a zadovoljavaju uvjete zadatka.

Dakle, svi kompleksni brojevi koji zadovoljavaju traženi uvjet su svi realni brojevi a te

$$a \in \left\{ i, -i, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Zadatak A-2.2.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\left\lfloor \frac{x^2 + 1}{x + 2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x - 1}{2} \right\rfloor = \frac{x(3x + 1)}{2(x + 2)}.$$

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od t.
Na primjer, ako je $t = 3.14$, onda je $\lfloor t \rfloor = 3$.

Rješenje.

Prema definiciji funkcije najveće cijelo, za sve realne t vrijedi $\lfloor t \rfloor \leqslant t$, pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je t cijeli broj.

Zato je

$$\left\lfloor \frac{x^2 + 1}{x + 2} \right\rfloor \leqslant \frac{x^2 + 1}{x + 2} \qquad \text{i} \qquad \left\lfloor \frac{x - 1}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x - 1}{2}.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$\frac{x(3x + 1)}{2(x + 2)} = \left\lfloor \frac{x^2 + 1}{x + 2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x - 1}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{2} = \frac{x(3x + 1)}{2(x + 2)}.$$

Dakle, obje gornje nejednakosti moraju biti jednakosti pa su zato $\dfrac{x^2+1}{x+2}$ i $\dfrac{x-1}{2}$ cijeli brojevi. Drugi razlomak je cijeli broj ako i samo ako je x neparan cijeli broj.

Prvi razlomak zapišimo kao:

$$\frac{x^2+1}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2}.$$

Kako je x cijeli broj, nužno je i dovoljno da $\frac{5}{x+2}$ bude cijeli broj. Zato je $x+2 \in \{1, -1, 5, -5\}$, odnosno $x \in \{-1, -3, 3, -7\}$.

Zadatak A-2.3.

Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.

U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

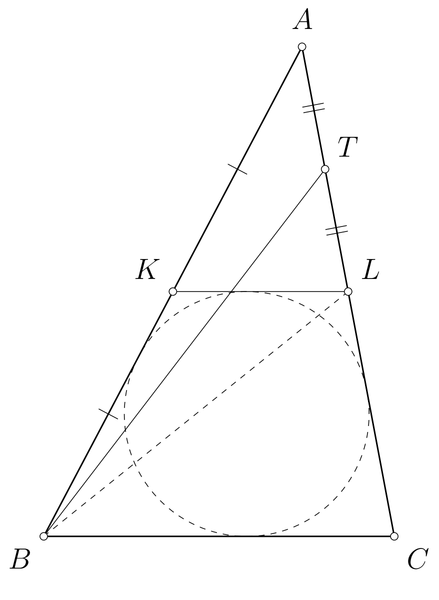
Rješenje.

Označimo s v duljinu visine trokuta ABC iz vrha A, a s r polumjer upisane kružnice. Površinu trokuta ABC tada možemo izraziti na dva načina:

$$r \cdot \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2} = P = \frac{v \cdot |BC|}{2}.$$

Iskoristimo li uvjet $3|BC| = |AB| + |CA|$ iz zadatka u gornjoj jednakosti, dobivamo $4r = v$.

Udaljenost pravaca KL i BC je $2r$, pa zaključujemo da visina iz vrha A u trokutu AKL ima duljinu $v - 2r = 4r - 2r = 2r$.



Budući da su pravci KL i BC parelelni, trokuti AKL i ABC imaju iste kutove, pa su slični. Omjer duljina visina iz vrha A u tim trokutima je $4r : 2r = 2 : 1$, pa je $|KL| = \frac{1}{2}|BC|$, tj. $\overline{KL}$ je srednjica trokuta ABC. Dakle, K i L su redom polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Budući da je $|AT| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{1}{2}|AL|$, zaključujemo da je T polovište dužine $\overline{AL}$. To znači da su $\overline{BT}$ i $\overline{KL}$ težišnice trokuta ABL, pa dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$ u omjeru $1 : 2$.

Zadatak A-2.4.

Odredi sve parove (m,n) cijelih brojeva za koje vrijedi $m^2 = n^5 + n^4 + 1$, a broj $m - 7n$ dijeli $m - 4n$.

Prvo rješenje.

Uočimo da vrijedi $n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$, stoga imamo

$$m^2 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Izračunajmo najveći zajednički djelitelj izraza u zagradama:

$$\begin{aligned}
M(n^3 - n + 1, n^2 + n + 1) &= M(n^3 - n + 1 - n(n^2 + n + 1), n^2 + n + 1) \\
&= M(-n^2 - 2n + 1, n^2 + n + 1) \\
&= M(-n^2 - 2n + 1 + (n^2 + n + 1), n^2 + n + 1) \\
&= M(-n + 2, n^2 + n + 1) \\
&= M(-n + 2, n^2 + n + 1 + n(-n + 2)) \\
&= M(-n + 2, 3n + 1) \\
&= M(-n + 2, 3n + 1 + 3(-n + 2)) \\
&= M(-n + 2, 7)
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je najveći zajednički djelitelj d brojeva $n^3 - n + 1$ i $n^2 + n + 1$ jednak 1 ili 7, stoga imamo dva slučaja.

Ako je $d = 7$, onda iz jednakosti $m^2 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ slijedi da je i m djeljiv sa 7. Nadalje, iz $d = M(-n + 2, 7)$, vidimo da je $d = 7$ samo ako n daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 7. Dakle, n nije djeljiv sa 7. Prema uvjetu zadatka,

$$\frac{m - 4n}{m - 7n} = 1 + \frac{3n}{m - 7n}$$

mora biti cijeli broj. Zaključujemo da $m - 7n$ dijeli $3n$, no to je nemoguće jer je $m - 7n$ djeljiv sa 7, a $3n$ nije. Zato u slučaju $d = 7$ nema rješenja.

Ako je $d = 1$, onda jednakost $m^2 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ daje faktorizaciju potpunog kvadrata m^2 na relativno proste faktore $n^3 - n + 1$ i $n^2 + n + 1$. Budući da su faktori relativno prosti, svaki od njih mora biti kvadrat cijelog broja.

Posebno, $n^2 + n + 1$ je kvadrat cijelog broja. Ovo očito vrijedi za $n = -1, 0$. Pokažimo da za preostale cijele brojeve n ovo nije istina. Doista, za sve prirodne brojeve n vrijede nejednakosti

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2.$$

Analogni zaključak dobivamo za $n < -1$ koristeći nejednakosti $(n + 1)^2 < n^2 + n + 1 < n^2$ koje vrijede za sve cijele brojeve $n < -1$.

Time smo pokazali da su jedine mogućnosti $n = -1$ i $n = 0$. Za $n = -1$ iz početnog uvjeta dobivamo $m^2 = -1$, pa ovaj slučaj odbacujemo. Za $n = 0$ dobivamo $m^2 = 1$, to jest $m = -1$ ili $m = 1$.

Za $n = 0$ i $m \neq 0$ vidimo da $m - 7n$ dijeli $m - 4n$, pa su konačna rješenja parovi

$$(m, n) = (-1, 0), \quad \text{i} \quad (m, n) = (1, 0).$$

Drugo rješenje.

Pogledajmo prvo jednadžbu $m^2 = n^5 + n^4 + 1$. U slučaju $n \leqslant -2$ imamo

$$m^2 = n^5 + n^4 + 1 = n(1 + n^4) + 1 \leqslant n \cdot 1 + 1 \leqslant -1 < 0,$$

što nije moguće jer je kvadrat cijelog broja nužno nenegativan broj. Dakle, nužno je $n \geqslant -1$. Za $n = -1$, dobivamo da je $m = 1$ ili $m = -1$, no tada broj $m - 4n$ nije djeljiv s $m - 7n$.

Za $n = 0$ je također $m = 1$ ili $m = -1$, te oba para zadovoljavaju i prvi uvjet u zadatku.

Od sada promatramo slučaj $n \geqslant 1$. Iz drugog uvjeta u zadatku zaključujemo i da je broj

$$\frac{3n}{m - 7n} = \frac{m - 4n}{m - 7n} - 1$$

cijeli. Kako brojnik nije jednak nuli, $m - 7n$ je djelitelj od broja $3n$. Budući da je $m - 7n$ djelitelj broja $3n$ (koji nije 0), mora vrijediti $|m - 7n| \leqslant 3n$, iz čega dalje slijedi

$$-3n \leqslant m - 7n \leqslant 3n, \quad \text{tj.} \quad 4n \leqslant m \leqslant 10n.$$

Odavde prvo zaključujemo da je $m \geqslant 0$, a onda da je $(10n)^2 \geqslant m^2$, tj.

$$100n^2 \geqslant m^2 = n^5 + n^4 + 1 \geqslant n^5.$$

Iz toga slijedi $n^3 \leqslant 100$, tj. $n \leqslant 4$. Direktnim uvrštavanjem vrijednosti $n = 1, 2, 3, 4$ u izraz $n^5 + n^4 + 1$ dobivamo vrijednosti $3, 49, 325, 1281$, od kojih je samo 49 potpun kvadrat. U tom slučaju imamo $(m, n) = (7, 2)$, no direktnom provjerom vidimo da broj

$$\frac{m - 4n}{m - 7n} = \frac{1}{7}$$

nije cijeli.

Konačno, jedini takvi parovi brojeva (m, n) su $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

Zadatak A-2.5.

Ukrug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja;
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane

(a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?

(b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

Rješenje.

Analizirat ćemo što se događa s određenim zbrojevima brojeva pri primjeni poteza. Označimo s a_k brojeve koji su zapisani u nekom trenutku, i to tako da je a_1 na onom mjestu u krugu na kojem se na početku nalazi jedinica, te $a_2, \ldots, a_{300}$ označavaju redom brojeve u smjeru kazaljke na satu. Nakon primjene prvog poteza dobivamo brojeve

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_{300} - a_2, \\ b_k &= a_k - a_{k-1} - a_{k+1}, \quad k = 2, \ldots, 299, \\ b_{300} &= a_{300} - a_{299} - a_1. \end{aligned}$$

(a) Promotrimo kako se mijenja zbroj svih napisanih brojeva kad primjenjujemo dozvoljene poteze. Ako ukupni zbroj brojeva a_k iznosi

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{300},$$

onda zbroj brojeva b_k iznosi

$$a_1 - a_{300} - a_2 + a_2 - a_1 - a_3 + \ldots + a_{300} - a_{299} - a_1 = -S$$

jer svaki broj a_k jednom pribrojimo i dvaput oduzmemo.

Nakon primjene drugog poteza zbroj svih brojeva će biti $S + 2$ ili $S - 2$. Zaključujemo da se primjenom dozvoljenih poteza ne može promijeniti parnost zbroja svih brojeva. Budući da je na početku zbroj svih brojeva 1 (neparan broj), nije moguće postići da budu zapisane dvije jedinice i 298 nula jer bi tada zbroj svih brojeva bio 2 (paran broj).

(b) Promotrimo kako se mijenja alternirajući zbroj napisanih brojeva. Ako alternirajući zbroj brojeva a_k iznosi

$$S' = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{299} - a_{300},$$

onda će nakon primjene prvog poteza alternirajući zbroj svih brojeva b_k biti

$$a_1 - a_{300} - a_2 - a_2 + a_1 + a_3 + \ldots - a_{300} + a_{299} + a_1 = 3S',$$

dok će nakon primjene drugog poteza alternirajući zbroj svih napisanih brojeva ostati S'.

Pretpostavimo da je moguće postići da budu napisane tri uzastopne jedinice i 297 nula. Na početku je alternirajući zbroj svih brojeva 1, a kad bi bile zapisane tri uzastopne jedinice i 297 nula alternirajući zbroj svih brojeva bi iznosio ili 1 ili -1, ovisno o tome na kojim mjestima se nalaze jedinice. Budući da se dozvoljenim potezima alternirajući zbroj ili utrostručuje ili ostaje isti, zaključujemo da tri jedinice moraju biti na mjestima tako da je alternirajući zbroj 1 te da ne smijemo koristiti prvi potez.

Promotrimo zbroj brojeva na mjestima $3, 6, \cdot, 300$, tj.

$$S_0 = a_3 + a_6 + \ldots + a_{300}.$$

Na početku je taj zbroj 0, a kad bi bile zapisane tri uzastopne jedinice i 297 nula taj bi zbroj iznosio 1. No, primjenom samo drugog poteza parnost tog zbroja se ne mijenja jer ili ne mijenjamo nijedan od brojeva $a_3, a_6, \ldots, a_{300}$ ili mijenjamo točno dva broja za 1. Kako 0 i 1 nisu iste parnosti, to pokazuje da dozvoljenim potezima nije moguće postići da budu napisane tri uzastopne jedinice i 297 nula.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak A-3.1.

Dan je trokut ABC takav da je $|AB| = 4, |BC| = 7, |AC| = 5$. Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$.
Izračunaj

$$\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2}.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2} &= \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 3\sin^2 \frac{\alpha}{2}\cos^2 \frac{\alpha}{2} \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 \alpha \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 \alpha
\end{aligned}$$

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABC dobivamo

$$\cos \alpha = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AC| \cdot |AB|} = \frac{16 + 25 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}.$$

Stoga je $\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, dobivamo $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$.

Budući da je $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ i $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, vrijedi $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ i $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$.

Slijedi $\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2} = \frac{27}{125} + \frac{8}{125} = \frac{7}{25}$.

Zadatak A-3.2.

Četvorku prirodnih brojeva (a, b, c, d) zovemo *zelenom* ako vrijedi

$$b = a^2 + 1, \quad c = b^2 + 1, \quad d = c^2 + 1$$

i $D(a) + D(b) + D(c) + D(d)$ je neparan, pri čemu je $D(k)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja k.

Koliko ima zelenih četvorki čiji su svi članovi manji od $1\,000\,000$?

Rješenje.

Prirodni broj ima neparno mnogo djelitelja ako i samo ako je kvadrat nekog prirodnog broja.

Za prirodni broj m vrijedi

$$m^2 < m^2 + 1 < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

pa $m^2 + 1$ nije potpun kvadrat. Dakle b, c, d nisu potpuni kvadrati, pa imaju paran broj djelitelja. Iz uvjeta zadatka slijedi da a ima neparan broj djelitelja, pa a mora biti potpuni kvadrat. Kako je $a < b < c < d$, svi članovi su manji od 10^6 ako i samo ako je $d < 10^6$.

Imamo niz nejednakosti

$$10^6 > d = c^2 + 1 > c^2 = (b^2+1)^2 > b^4 = (a^2+1)^4 > a^8.$$

Stoga mora biti $a^8 < 10^6$. Zbog $10^6 = 1000^3 < 1024^3 = 2^{20} < 2^{24} = 8^8$, zaključujemo da je $a < 8$. Jedini kvadrati manji od 8 su 1 i 4.

Direktnom provjerom zaključujemo da su obje četvorke $(1, 2, 5, 26)$ i $(4, 17, 290, 84101)$ zelene. Dakle, postoje dvije takve zelene četvorke.

Napomena: Tvrdnju da je broj kvadrat prirodnog broja ako i samo ako ima neparan broj djelitelja učenik ne treba dokazivati. Slijedi jednostavan dokaz te tvrdnje. Sve djelitelje broja n možemo grupirati u parove pri čemu je djelitelj d u paru s $\frac{n}{d}$, osim ako je $n = k^2$ za neki prirodan broj k (tada je k u paru sam sa sobom).

Zadatak A-3.3.

Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima.

Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

Rješenje.

Promatramo vrhove jediničnih kvadrata. Svaki pravokutnik 3×1 prekriva točno 8 vrhova.

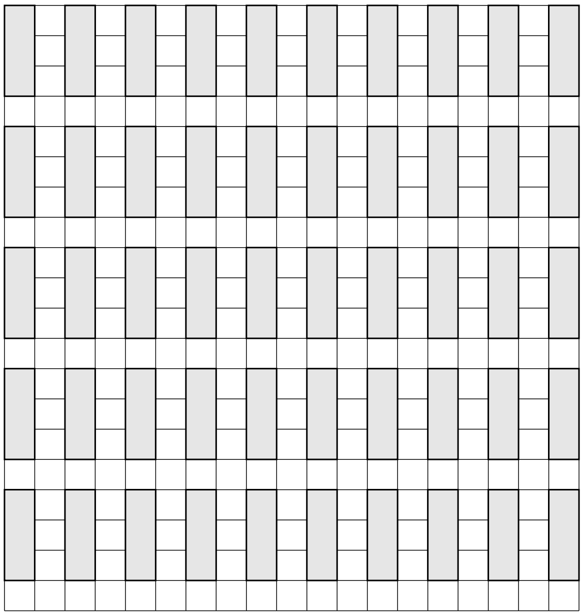
Primijetimo da, kako god bio okrenut, pravokutnik 3×1 prekriva paran broj vrhova u svakom vertikalnom nizu.

Budući da je u svakom vertikalnom nizu 21 vrh, moguće je pokriti najviše 20 vrhova.

Vertikalnih nizova vrhova ima 20, pa ćemo ukupno moći pokriti najviše $20 \cdot 20 = 400$ vrhova.

To znači da na ploču možemo postaviti najviše $\frac{400}{8} = 50$ pravokutnika 3×1.

Primjerom pokazujemo da zbilja možemo postaviti 50 pravokutnika:



Zadatak A-3.4.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2c-1}\leqslant 3.$$

Rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{a^2+6}{2a^2+b^2+c^2+b^2+c^2+2a-1} &\leqslant \frac{a^2+6}{2a^2+b^2+c^2+2bc+2a-1}\\ &= \frac{a^2+6}{2a^2+(b+c)^2+2a-1}\\ &= \frac{a^2+6}{2a^2+(3-a)^2+2a-1}\\ &= \frac{a^2+6}{3a^2-4a+8}\\ &= \frac{a^2+6}{a^2+6+2(a-1)^2}\leqslant 1.\end{aligned}$$

Analogno se pokaže da su i druga dva pribrojnika također manja od ili jednaka 1, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

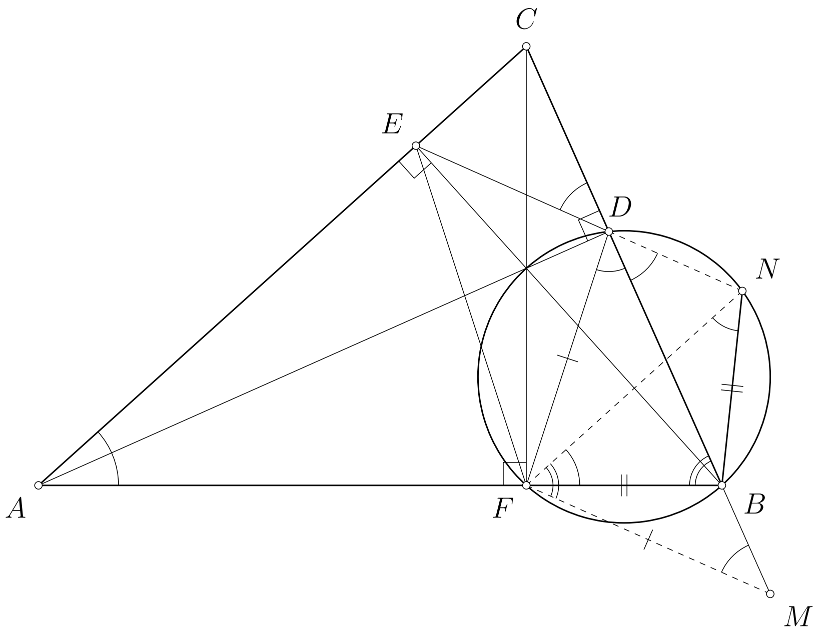
Zadatak A-3.5.

Dan je šiljastokutan trokut ABC takav da je $|BC| < |CA| < |AB|$. Neka su D, E i F redom nožišta njegovih visina iz vrhova A, B i C. Pravac točkom F paralelan s DE siječe pravac BC u točki M, a simetrala kuta $\sphericalangle MFE$ siječe pravac DE u točki N.

Dokaži da je točka F središte kružnice opisane trokutu DMN ako i samo ako je točka B središte kružnice opisane trokutu FMN.

Rješenje.

Koristeći uobičajene oznake za veličine kutova trokuta ABC, iz uvjeta zadatka je $\alpha < \beta < \gamma$.



Kutovi $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle AEB$ su pravi pa je četverokut $ABDE$ tetivan, i vrijedi $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BAE = \alpha$. Analogno, tetivni su i četverokuti $BCEF$ i $CAFD$, pa je $\sphericalangle BFE = 180° - \sphericalangle ECB = 180° - \gamma$, $\sphericalangle BFD = \sphericalangle ACD = \gamma$ i $\sphericalangle FDB = \sphericalangle FAC = \alpha$.

S obzirom na to da je $FM \parallel DE$, vrijedi $\sphericalangle BMF = \sphericalangle CDE = \alpha$, pa je $\sphericalangle MFB = \sphericalangle CBF - \sphericalangle BMF = \beta - \alpha$. Budući da je $\sphericalangle MFE = \sphericalangle MFB + \sphericalangle BFE = (\beta - \alpha) + (180° - \gamma) = 2\beta$, odnosno $\sphericalangle MFN = \beta$, imamo

$$\sphericalangle BFN = \sphericalangle MFN - \sphericalangle MFB = \alpha < \gamma = \sphericalangle BFD,$$

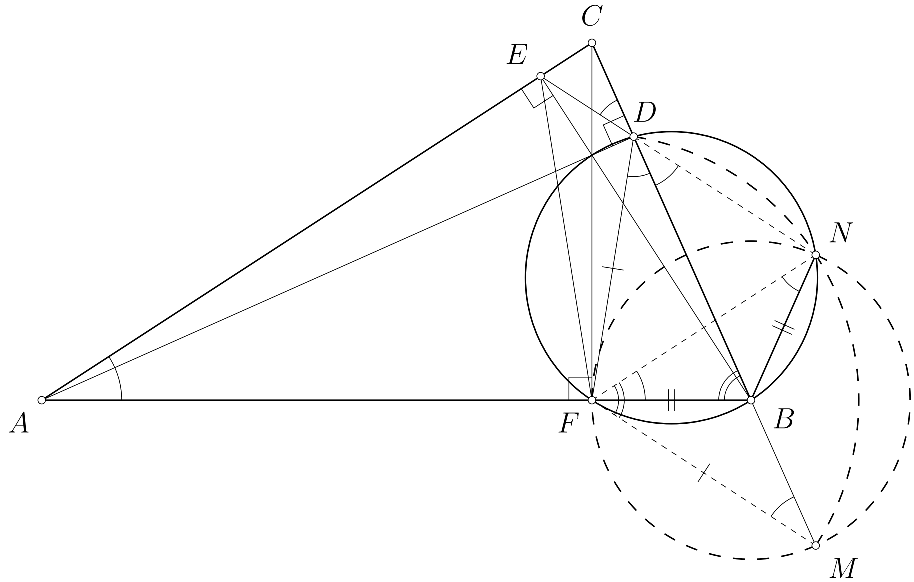
zbog čega se točka N nalazi izvan trokuta ABC.

Zato je $\sphericalangle BDN = \sphericalangle CDE = \alpha = \sphericalangle BFN$, a četverokut $BNDF$ je tetivan.

Nadalje je $\sphericalangle FNB = \sphericalangle FDB = \alpha$, i primjećujemo da su trokuti FMD i BNF jednakokračni, stoga vrijedi $|FM| = |FD|$ i $|BN| = |BF|$.

Sljedećim nizom ekvivalencija dovršavamo dokaz:

$$
\begin{aligned}
& F \text{ je središte kružnice opisane trokutu } DMN \\
\iff\ & \sphericalangle MFN = 2\sphericalangle MDN \\
\iff\ & \beta = 2\alpha \\
\iff\ & \beta - \alpha = \alpha \\
\iff\ & \sphericalangle MFB = \sphericalangle BMF \\
\iff\ & |BM| = |BF| \\
\iff\ & B \text{ je središte kružnice opisane trokutu } FMN.
\end{aligned}
$$



DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)(x-a^4)$$

realni.

Prvo rješenje.

Svaki realni broj a zadovoljava traženi uvjet, stoga pretpostavimo nadalje da a nije realan broj.

Neka je z kompleksan broj koji nije realan. Ako je z nultočka polinoma s realnim koeficijentima, tada je i $\overline{z}$ nultočka. Zato imamo jedan od tri slučaja: $\overline{a} = a^2$, $\overline{a} = a^3$ ili $\overline{a} = a^4$.

Ako je $\overline{a} = a^2$, onda je $|a| = |a|^2$, pa budući da je $a \neq 0$ slijedi $|a| = 1$. Nadalje, dobivamo $a^3 = a^2 \cdot a = \overline{a} \cdot a = |a|^2 = 1$. Zato je a^3 realna nultočka polinoma $P(x)$ pa mora biti i a^4 budući da ni s kojom drugom nultočkom ne može činiti kompleksno konjugirani par. Zato je i $a = \dfrac{a^4}{a^3}$ realan broj, kontradikcija.

Ako je $\overline{a} = a^3$, na sličan način pokazujemo da vrijedi $a^4 = 1$. Odavde je $a = \pm i$, budući da realna rješenja ne promatramo. Direktnom provjerom vidimo da obje mogućnosti za a zadovoljavaju uvjete zadatka

$$P(x) = (x \mp i)(x+1)(x \pm i)(x-1) = (x^2+1)(x^2-1) = x^4 - 1.$$

Ako je $\overline{a} = a^4$, na sličan način pokazujemo da vrijedi $a^5 = 1$. Rješenja koja nisu realna su

$$a = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Primijetimo da iz činjenice da je $a^5 = 1$ slijedi

$$\overline{a}^2 = a^5 \overline{a}^2 = a^3 a^2 \overline{a}^2 = a^3 |a|^4 = a^3.$$

Dakle, za svaki kompleksan broj a, koji nije realan, takav da je $a^5 = 1$, brojevi a^2 i a^3 također čine kompleksno konjugirani par. Kako su parovi (a, a^4) i (a^2, a^3) kompleksno konjugirani, zaključujemo da polinom $P(x)$ ima realne koeficijente.

Konačno, svi kompleksni brojevi koji zadovoljavaju traženi uvjet su svi realni brojevi a te

$$a \in \{i, -i\} \cup \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) : k = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, pretpostavimo da a nije realan broj.

Neka je $P(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, računamo:

$$\begin{aligned}
A &= -a - a^2 - a^3 - a^4 = -a(1+a)(1+a^2),\\
B &= a^3 + a^4 + a^5 + a^5 + a^6 + a^7 = a^3(1+a^2)(1+a+a^2),\\
C &= -a^6 - a^7 - a^8 - a^9 = a^5 A,\\
D &= a^{10}.
\end{aligned}$$

Ako je $A = 0$, onda je $a = \pm i$ i svi su koeficijenti realni, tj. $\pm i$ također zadovoljavaju uvjete.

Ako $A \neq 0$, onda je $a^5 = \dfrac{C}{A}$ realan broj. Vidimo da to znači i da je $D = (a^5)^2$ realan, stoga moramo odrediti kompleksne brojeve a takve da su brojevi

$$a^5, \quad A = -a(1+a)(1+a^2), \quad B' = B - 2a^5 = a^3 + a^4 + a^6 + a^7 = a^3(1+a)(1+a^3)$$

realni. Kako je $A \neq 0$, ovo znači da je broj

$$1 + \frac{B'}{A} = 1 - \frac{a^2 + a^5}{1 + a^2} = -\frac{a^5 - 1}{1 + a^2}$$

realan. Ukoliko je $a^5 \neq 1$, onda je $1 + a^2$ realan, pa i a^2, a zato je i $a = \dfrac{a^5}{(a^2)^2}$ realan, suprotno pretpostavci. Dakle, zaključujemo da je $a^5 = 1$, tj.

$$a = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \ \ k = 1, 2, 3, 4.$$

Sada imamo

$$0 = a^5 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4),$$

što zbog $a \neq 1$ daje da je druga zagrada jednaka nuli. Zato je $A = 1$, $B' = -1$, te $B = B' + 2a^5 = 1$. Dakle, svi koeficijenti polinoma $P(x)$ su realni.

Konačno, svi kompleksni brojevi koji zadovoljavaju traženi uvjet su svi realni brojevi a te

$$a \in \{i, -i\} \cup \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) : k = 1, 2, 3, 4\right\}.$$

Zadatak A-4.2.

Rudi i Miljen igraju igru na školskoj ploči naizmjence odigravajući poteze. Igrač koji je na potezu bira dva relativno prosta broja napisana na ploči, briše ih te zapisuje na ploču njihov zbroj. Gubi igrač koji to ne može napraviti. Igru započinje Rudi. Dokaži da Miljen ima pobjedničku strategiju ako je na početku na ploči bilo napisano

(a) 2019 jedinica;

(b) 2020 jedinica.

Rješenje.

(a) Tvrdimo da Miljen može postići da nakon svakog njegovog poteza na ploči bude zapisan neki neparni broj n i parno mnogo jedinica, točnije, njih $2019 - n$. Tada nakon 1009 Miljenovih poteza na ploči ostaje samo broj 2019 te Rudi ne može napraviti potez, tj. Miljen pobjeđuje.

Na početku ploča izgleda upravo kako je opisano, zapravo je $n = 1$. Rudi može izbrisati dvije jedinice i na ploču zapisati broj 2, tada Miljen izbriše brojeve n i 2, što može jer je broj n neparan, te na ploču zapiše broj $n + 2$. Miljen time ploču dovodi u željeno stanje.

Jedina druga opcija koju Rudi ima je izbrisati broj n i jednu jedinicu te zapisati broj $n + 1$. No, tada Miljen izbriše broj $n + 1$ i još jednu jedinicu, što sigurno može jer je u tom trenutku neparno jedinica na ploči, te zapiše broj $n + 2$.

Dakle, upravo opisana strategija Miljenu donosi sigurnu pobjedu.

(b) U ovom slučaju Miljen koristi istu strategiju kao u (a), osim u svom zadnjem potezu. Naime, nakon svakog Miljenovog poteza je na ploči neparan broj n i neparno mnogo jedinica, točnije, njih $2020 - n$. Preostaje samo opisati Miljenov zadnji potez, tj. njegov 1009. potez.

Ukoliko su nakon Rudijevog 1009. poteza na ploči napisani brojevi 2018, 1 i 1, onda Miljen izbriše te dvije jedinice i zapiše na ploču broj 2. Rudi tada više ne može napraviti potez, jer brojevi 2018 i 2 nisu relativno prosti, tj. Miljen pobjeđuje.

Ako su nakon Rudijevog 1009. poteza na ploči napisani brojevi 2017, 2 i 1, onda Miljen obriše brojeve 2017 i 1 te na ploču zapiše broj 2018. Dakle, Miljen opet pobjeđuje.

Zadatak A-4.3.

Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n,

$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j, k vrijedi

$$(i - j)M_k + (j - k)M_i + (k - i)M_j = C,$$

dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

Prvo rješenje.

Uvrštavanjem $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ i $(i, j, k) = (2, 1, 3)$ dobivamo da je

$$-M_3 - M_1 + 2M_2 = C = M_3 - 2M_2 + M_1,$$

tj. $C = -C$, odnosno $C = 0$. Uvrstimo sada $(i, j, k) = (n, n + 1, n + 2)$ pa je

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2},$$

za svaki prirodni broj n, što znači da je niz (M_n) aritmetički. Dakle, postoje realni brojevi m i d takvi da je

$$M_n = m + nd,$$

za svaki prirodni broj n. Tada je

$$a_n = nM_n - (n - 1)M_{n-1} = m + \left(n^2 - (n - 1)^2\right) d = (m - d) + n(2d),$$

tj. niz (a_n) je također aritmetički.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dobivamo da je $C = 0$ i

$$2M_{i+1} = M_i + M_{i+2}, \tag{4}$$

za svaki prirodni broj i.

Uvrštavanjem $i = 1$ u (4) dobivamo

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2},$$

tj. niz a_1, a_2, a_3 je aritmetički.

Pretpostavimo da je niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetički, za neki prirodni broj $n \geqslant 3$. To znači da postoje realni brojevi a i d takvi da je $a_\ell = a + \ell d$, za svaki $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Za iste te ℓ vrijedi

$$M_\ell = \frac{(a + 1 \cdot d) + (a + 2 \cdot d) + \cdots + (a + \ell \cdot d)}{l} = a + \frac{\ell + 1}{2} d.$$

Uvrstimo sada $i = n - 1$ u (4)

$$M_{n+1} = 2M_n - M_{n-1} = 2\left(a + \frac{n+1}{2} d\right) - \left(a + \frac{n}{2} d\right) = a + \frac{n+2}{2} d.$$

Sada je

$$a_{n+1} = (n+1)M_{n+1} - nM_n = a + \frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{2} d = a + (n+1)d,$$

tj. i niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ je aritmetički.

Po principu matematičke indukcije tvrdnja zadatka je dokazana.

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju dobivamo da je $C = 0$. Definirajmo $d := a_2 - a_1$. Očito za $n = 1, 2$ vrijedi

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

a uvrštavanjem $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ i sređivanjem dobivamo da vrijedi i za $n = 3$. Dokazat ćemo da to vrijedi i za proizvoljan $n \geqslant 4$. Uvrstimo $(i, j, k) = (n, 2, 1)$ i $(i, j, k) = (n - 1, 2, 1)$, te dobijemo:

$$(n-2)M_1 + M_n - (n-1)M_2 = 0,$$
$$(n-3)M_1 + M_{n-1} - (n-2)M_2 = 0.$$

Pomnožimo li prvu jednakost s n a drugu s $(n - 1)$ i izjednačimo, dobivamo:

$$n(n-2)M_1 + nM_n - n(n-1)M_2 = (n-1)(n-3)M_1 + (n-1)M_{n-1} - (n-1)(n-2)M_2.$$

Korištenjem $a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1}$, $M_1 = a_1$ i $M_2 = \frac{d}{2} + a_1$ i sređivanjem, dobivamo

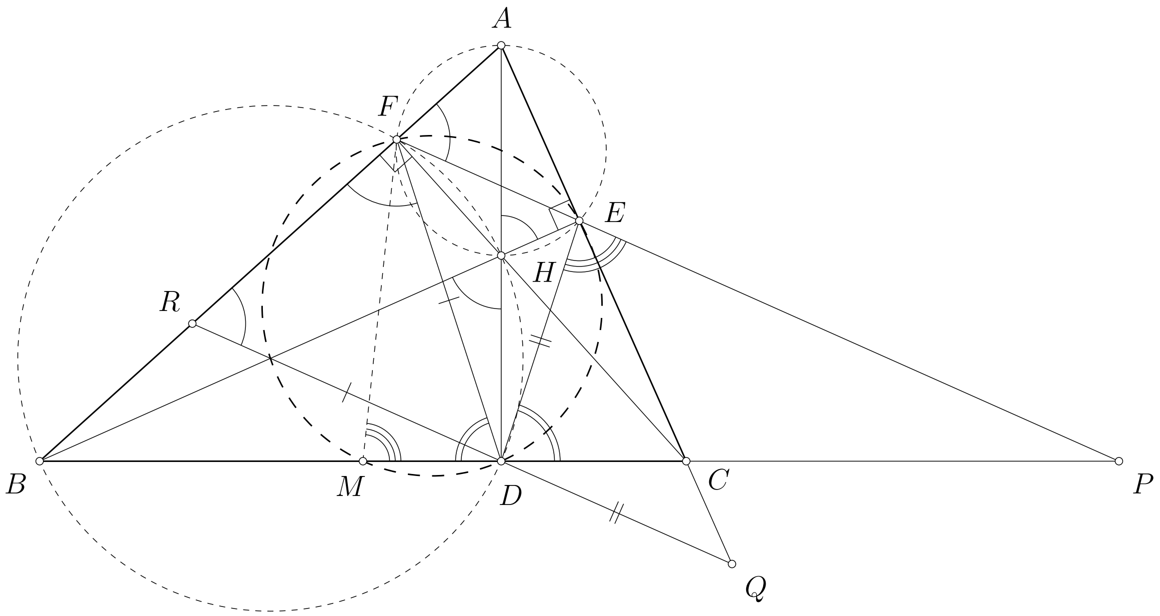
$$\begin{aligned} a_n &= \left[-n(n-2) + n(n-1) + (n-1)(n-3) - (n-1)(n-2)\right] a_1 \\ &\quad + \left[n(n-1) - (n-1)(n-2)\right] \frac{d}{2} \\ &= \left[n - (n-1)\right] a_1 + 2(n-1)\frac{d}{2} = a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

Kako gornja jednakost vrijedi za sve $n \geqslant 4$, pa onda i za sve prirodne n, zaključujemo da je niz (a_n) aritmetički s prvim članom a_1 i korakom $d = a_2 - a_1$.

Zadatak A-4.4.

Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D, E i F nožišta visina trokuta ABC iz vrhova A, B i C, redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P. Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R. Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle NQP + \sphericalangle NRP < 180°$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

Prvo rješenje.



Trokut ABC je šiljastokutan pa se točke D E i F nalaze, redom, na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Vrijedi da je $|AB| > |AC|$, stoga je $|BD| > |CD|$.

Dakle, $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$ pa točka P leži na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha C. Točka Q leži na rodužetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha C, a točka R na dužini $\overline{BF}$.

Neka je točka H ortocentar trokuta ABC, a točka M polovište stranice $\overline{BC}$.

Pravci DR i EF su paralelni pa je $\sphericalangle DRF = \sphericalangle EFA$. Četverokut $AFHE$ je tetivan ($\sphericalangle AFH = \sphericalangle AEH = 90°$) pa je $\sphericalangle EFA = \sphericalangle EHA$. Nadalje, četverokut $BDHF$ je također tetivan ($\sphericalangle BDH = \sphericalangle BFH = 90°$) pa je $\sphericalangle EHA = \sphericalangle DHB = \sphericalangle DFB = \sphericalangle DFR$. Dakle, u trokutu DFR je $\sphericalangle DRF = \sphericalangle DFR$, tj. $|DR| = |DF|$.

Slično, pravci DQ i FE su paralelni pa je $\sphericalangle DQE = \sphericalangle FEA$, četverokut $AFHE$ je tetivan pa je $\sphericalangle FEA = \sphericalangle FHA$. Četverokut $CEHD$ je također tetivan ($\sphericalangle CEH = \sphericalangle CDH = 90°$) pa je $\sphericalangle FHA = \sphericalangle DHC = \sphericalangle DEC = \sphericalangle DEQ$. Stoga u trokutu DQE vrijedi $\sphericalangle DQE = \sphericalangle DEQ$, odnosno $|DQ| = |DE|$.

Točke M, F, E i D leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC, stoga je četverokut $MFED$ tetivan. Zato je $\sphericalangle FMD = 180° - \sphericalangle FED = \sphericalangle PED$.

Nadalje je $\sphericalangle FDH = \sphericalangle FBH = \sphericalangle ABE = 90° - \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACF = \sphericalangle ECH = \sphericalangle EDH$.

Zato je $\sphericalangle FDM = 90° - \sphericalangle FDH = 90° - \sphericalangle EDH = \sphericalangle PDE$. Dakle, trokuti FDM i PDE su slični. Zaključujemo da je

$$\frac{|DF|}{|DM|} = \frac{|DP|}{|DE|},$$

iskoristimo da je $|DF| = |DR|$ i $|DE| = |DQ|$ pa je

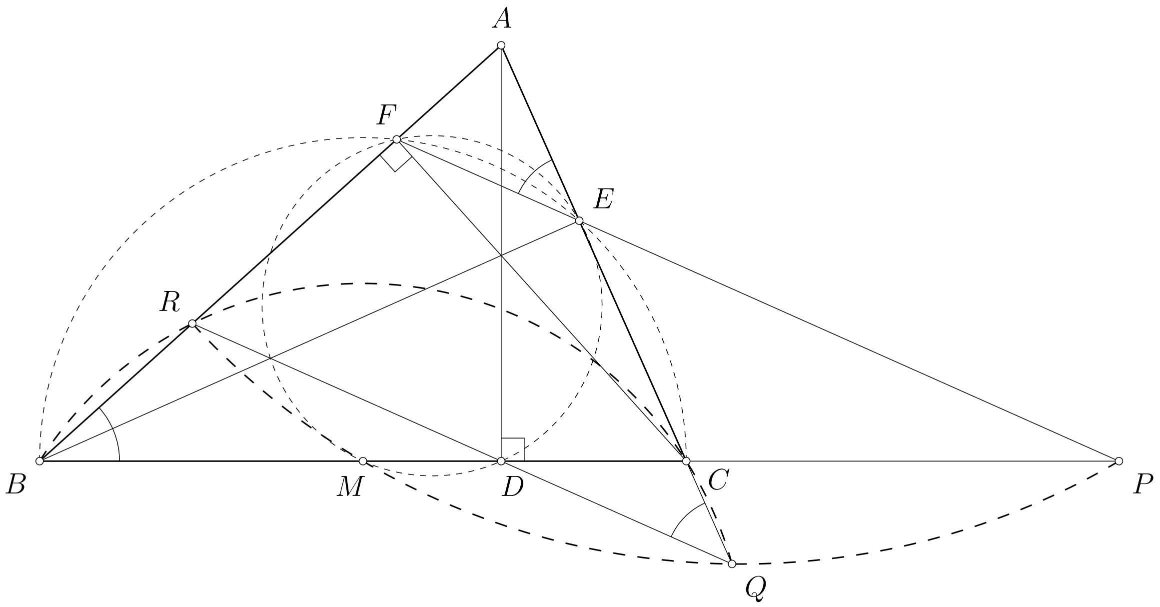
$$|DR| \cdot |DQ| = |DP| \cdot |DM|.$$

Dakle, četverokut $PQMR$ je tetivan. Neka je k četverokutu $PQMR$ opisana kružnica.

Kako je $\sphericalangle NQP + \sphericalangle NRP < 180°$, točka N se nalazi unutar kružnice k, tj. na dužini $\overline{CM}$ i pri tome je $N \neq M$. Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$ pa je $|BN| > |CN|$.

Drugo rješenje.

Uz iste oznake kao u prvom rješenju, na drugi način dokažimo da je četverokut $PQMR$ tetivan.



Kao u prošlom rješenju izvedemo zaključke o pozicijama točaka P, Q i R na pravcima BC, AC i AB. Također, zbog $|BD| > |DC|$, zaključujemo da se M nalazi na dužini $\overline{BD}$.

Uočimo da je četverokut $ECBF$ tetivan jer je $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CFB = 90°$. Također, četverokut $MDEF$ je također tetivan jer mu sva četiri vrha leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC. Promatrajući potenciju točke P u odnosu na te dvije kružnice, dobivamo

$$|PC| \cdot |PB| = |PE| \cdot |PF| = |PD| \cdot |PM|.$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned}
|DC| \cdot |DB| &= |DC| \cdot (|PB| - |DP|) = |DC| \cdot |PB| - |DC| \cdot |DP| \\
&= (|DP| - |PC|) \cdot |PB| - (|MC| - |DM|) \cdot |DP| \\
&= |DP| \cdot |PB| - |PC| \cdot |PB| - |MC| \cdot |DP| + |DM| \cdot |DP| \\
&= |DP| \cdot |PB| - |DP| \cdot |PM| - |MB| \cdot |DP| + |DM| \cdot |DP| \\
&= |DP| \cdot (|PB| - |PM| - |MB|) + |DM| \cdot |DP| = |DM| \cdot |DP|.
\end{aligned}$$

Nadalje, tetivnost četverokuta $ECBF$ i paralelni pravci EF i QR nam daju i sljedeće:

$$\sphericalangle RQC = \sphericalangle FEA = 180° - \sphericalangle CEF = \sphericalangle FBC = \sphericalangle RBC,$$

odakle zaključujemo i da je četverokut $QCRB$ tetivan. Potencija točke D na tu kružnicu daje

$$|DC| \cdot |DB| = |DR| \cdot |DQ|.$$

Dva dobivena rezultata zajedno daju

$$|DR| \cdot |DQ| = |DC| \cdot |DB| = |DM| \cdot |DP|,$$

pa iz obrata poučka o potenciji točke zaključujemo da je $PQMR$ tetivan.

Rješenje dovršavamo kao u prvom rješenju.

Napomena: Relacija $|PC| \cdot |PB| = |PD| \cdot |PM|$ umjesto iz Feuerbachove kružnice može se dobiti i primjenom Menelajevog teorema na pravac EF i Cevinog teorema na visine trokuta ABC.

Zadatak A-4.5.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta.

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$f(a, b) + a + b = f(a, 1) + f(1, b) + ab.$$
- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a + b$ i $a + b - 1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a, b)$ djeljiv s p.

Prvo rješenje.

Uvrstimo li u jednakost iz prvog uvjeta $(a, b) = (1, 1)$ dobivamo $f(1, 1) = 1$.

Pogledajmo jednadžbu iz prvog uvjeta za parove brojeva (a, b) i $(a, b+1)$, te oduzmimo. Nakon sređivanja, dobivamo

$$f(a, b + 1) - f(a, b) = f(1, b + 1) - f(1, b) + a - 1.$$

Neka je $p > 2$ prost broj koji dijeli $a + b$. Iz drugog uvjeta dobivamo da su oba izraza na lijevoj strani jednakosti djeljiva s p, pa je zato i desna strana jednakosti djeljiva s p. Nadalje, kako je $a + b$ djeljivo s p, dobivamo

$$p \mid f(1, b + 1) - f(1, b) - b - 1,$$

za svaka dva prirodna broja a, b, te za svaki prosti broj $p > 2$ koji dijeli $a + b$. Fiksirajmo neki prirodni broj b. Kako izraz s desne strane ne ovisi o a, uzimajući razne izbore za a i razne neparne proste djelitelje od $a + b$ vidimo da je izraz $f(1, b + 1) - f(1, b) - b - 1$ djeljiv s beskonačno mnogo prostih brojeva, što je moguće samo ako je taj izraz jednak nuli. Dakle, dobili smo

$$f(1, b + 1) = f(1, b) + b + 1,$$

za svaki prirodni broj b.

Odavdje vidimo da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\begin{aligned} f(1, n) &= f(1, n - 1) + n = f(1, n - 2) + (n - 1) + n = \dots \\ &= f(1, 1) + 2 + 3 \cdots + n = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Na isti način možemo provesti argument oduzimajući jednadžbu iz prvog uvjeta za parove brojeva $(a+1,b)$ i (a,b), te dobiti da vrijedi

$$f(n,1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

za sve prirodne brojeve n.

Uvrstimo li formule za $f(1,n)$ i $f(n,1)$ u prvi uvjet, dobivamo da za svaka dva prirodna broja a,b vrijedi

$$f(a,b)=\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}+ab-a-b=\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}=\binom{a+b}{2}.$$

Ovako definirana funkcija zadovoljava i drugi uvjet, te zaključujemo da je to jedino rješenje.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je

$$\binom{a+b}{2}+a+b=\binom{a+1}{2}+\binom{1+b}{2}+ab.$$

Neka je $f(a,b)=\binom{a+b}{2}+g(a,b)$, tada je $g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ (sa $\mathbb{Z}$ je označen skup cijelih brojeva) funkcija za koju vrijedi

- Za sve $a,b\in\mathbb{N}$ je
$$g(a,b)=g(a,1)+g(1,b).$$
- Ako su $a,b\in\mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv prostim brojem $p>2$, onda je i $g(a,b)$ djeljiv s p.

Naime, drugi uvjet vrijedi zato što je $\binom{a+b}{2}=\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}$, a taj broj je djeljiv prostim brojem $p>2$ ako je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv s p, isto kao i broj $f(a,b)$ pa je onda i $g(a,b)=f(a,b)-\binom{a+b}{2}$ djeljiv s p.

Neka je $p>2$ prost broj, sve kongruencije nadalje su modulo p te cijelo vrijeme podrazumijevamo da su a i b prirodni brojevi.

Iz prvog uvjeta na funkciju g zaključujemo da ako je $g(a,b)\equiv g(1,b)\equiv 0$, onda je i $g(a,1)\equiv 0$ te analogno, ako je $g(a,b)\equiv g(a,1)\equiv 0$, onda je i $g(1,b)\equiv 0$.

Iz drugog uvjeta slijedi da je $g(a,1)\equiv g(1,b)\equiv 0$ za sve $a\equiv -1,0$ te sve $b\equiv -1,0$.

Ako je $a\equiv 1$ i $b\equiv 0$, onda je $a+b\equiv 1$ i $1+b\equiv 1$, što znači da je $g(a,b)\equiv g(1,b)\equiv 0$ pa je i $g(a,1)\equiv 0$. Analogno, za $a\equiv 0$ i $b\equiv 1$ vidimo da je $g(1,b)\equiv 0$, za svaki $b\equiv 1$.

Pretpostavimo sada da je n prirodan broj takav da je $g(a,1)\equiv g(1,b)\equiv 0$, za sve $a\equiv\pm n$ i za sve $b\equiv\pm n$. Pokazali smo da ova tvrdnja vrijedi za $n=1$.

Neka je $a\equiv n+1$ i $b\equiv -n$, onda je $a+b\equiv 1$, što znači da je $g(a,b)\equiv g(1,b)\equiv 0$ pa je i $g(a,1)\equiv 0$. Analogno, za $a\equiv -n$ i $b\equiv n+1$ vidimo da je $g(1,b)\equiv 0$, za svaki $b\equiv n+1$.

Ako je $a\equiv -(n+1)$ i $b\equiv n+1$, onda je $a+b\equiv 0$, što znači da je $g(a,b)\equiv g(1,b)\equiv 0$ pa je i $g(a,1)\equiv 0$. Analogno, za $a\equiv n+1$ i $b\equiv -(n+1)$ vidimo da je $g(1,b)\equiv 0$, za svaki $b\equiv n+1$.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je $g(a,1) \equiv g(1,b) \equiv 0$, za sve a i b.

Isti zaključak možemo provesti za bilo koji prost broj $p > 2$, stoga su brojevi $g(a,1)$ i $g(1,b)$ djeljivi svakim prostim brojem $p > 2$, što znači da je $g(a,1) = g(1,b) = 0$, za sve $a, b \in \mathbb{N}$. Odnosno, vrijedi da je $g(a,b) = g(a,1) + g(1,b) = 0$, za sve $a, b \in \mathbb{N}$.

Stoga je jedino rješenje funkcija

$$f(a,b) = \binom{a+b}{2},$$

za koju smo već vidjeli da zadovoljava prvi uvjet, a također zadovolja i drugi uvjet.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-1.1.

Za međusobno različite realne brojeve a i b vrijedi

$$a+9=(b-3)^2 \quad \text{i} \quad b+9=(a-3)^2.$$

Koliko iznosi a^2+b^2 ?

Rješenje.

Kvadrirat ćemo binome i pojednostavniti dane jednakosti, a zatim ih zbrojiti i oduzeti. Dobivamo

$$\begin{aligned} a+9&=b^2-6b+9 \\ b+9&=a^2-6a+9, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a&=b^2-6b \\ b&=a^2-6a. \end{aligned}$$

Nakon zbrajanja dobivamo

$$a+b=a^2+b^2-6(a+b),$$

odnosno

$$a^2+b^2=7(a+b). \tag{1}$$

Nakon oduzimanja redom dobivamo

$$\begin{aligned} a-b&=b^2-a^2-6(b-a) \\ &=-(a-b)(a+b)+6(a-b), \end{aligned}$$

iz čega dijeljenjem s $a-b \neq 0$ slijedi

$$1=-(a+b)+6, \qquad \text{tj.} \qquad a+b=5.$$

Konačno, iz (1) slijedi $a^2+b^2=7(a+b)=7\cdot 5=35$.

Zadatak B-1.2.

Odredite skup svih cijelih brojeva n za koje vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2019^2-1}\right)<\frac{2019}{n^2}.$$

Rješenje.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdots\frac{2019^2}{(2019-1)(2019+1)}<\frac{2019}{n^2}.$$

Svaki faktor na lijevoj strani jednakosti možemo zapisati u obliku:

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x\cdot x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}.$$

Slijedi redom

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdots\frac{2019\cdot 2019}{2018\cdot 2020}<\frac{2019}{n^2}$$

$$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{2018}{2019}\cdot\frac{2019}{2018}\right)\cdot\frac{2019}{2020}<\frac{2019}{n^2}.$$

Uočimo da su svaka dva susjedna faktora počevši od drugog po redu do pretposljednjeg, međusobno recipročni pa je njihov umnožak jednak 1. Nakon toga dobivamo

$$\frac{2\cdot 2019}{2020}<\frac{2019}{n^2},$$

što vrijedi ako i samo ako je $n^2<1010$ i $n\neq 0$. To znači da je

$$0<|n|<1010, \qquad \text{odnosno} \qquad -\sqrt{1010}<n<\sqrt{1010}, n\neq 0.$$

Konačno, traženi cijeli brojevi n pripadaju skupu $\{-31,-30,\ldots,-1,1,2,\ldots,30,31\}$.

Zadatak B-1.3.

Na koliko se načina broj 455 može zapisati kao zbroj rastućeg niza od dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Neka je n prvi broj u nizu od $k+1$ uzastopnih brojeva, $k\geqslant 1$. Tada je

$$\begin{aligned}455&=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)=(k+1)n+(1+2+3+\cdots+k)\\&=(k+1)n+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(2n+k)}{2},\end{aligned}$$

pa slijedi $910=(2n+k)(k+1)$.

Rastav broja 910 na proste faktore je $910=2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$.

Uočimo da su brojevi $(2n+k)$ i $(k+1)$ različite parnosti, što znači da jedna od zagrada mora biti jednaka parnom djelitelju od 910, a to su brojevi 2, 10, 14, 26, 70, 130, 182.

Uz činjenicu da je $2n+k>k+1$ dobivamo 7 linearnih sustava čijim rješavanjem dolazimo do brojeva n i k:

$$\begin{array}{ccccccc} k+1=2 & k+1=10 & k+1=14 & k+1=26 & k+1=13 & k+1=7 & k+1=5\\ 2n+k=455 & 2n+k=91 & 2n+k=65 & 2n+k=35 & 2n+k=70 & 2n+k=130 & 2n+k=182.\end{array}$$

Svaki od tih sustava ima jedinstveno rješenje, pa je ukupno 7 načina da se broj 455 prikaže kao traženi zbroj.

Zadatak B-1.4.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.

Rješenje.

Traženi brojevi mogu biti troznamenkasti ili četveroznamenkasti brojevi. To su brojevi oblika

1° $\overline{xxx}$, $x \neq 0$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Troznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake ima točno 9.

2° $\overline{xxx0}$, $\overline{xx0x}$, $\overline{x0xx}$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Četveroznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake, a četvrta je 0 ima $9 \cdot 3 = 27$. (Znamenku x možemo odabrati na 9 načina, za svaki od 3 moguća odabira mjesta za znamenku 0.)

3° $\overline{xxxy}$, $\overline{xxyx}$, $\overline{xyxx}$, $\overline{yxxx}$, $x \neq y$, $x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Četveroznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake, a četvrta je različita od 0, ukupno je $9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$.

4° $\overline{x000}$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ovakvih brojeva je 9.

Ukupno je $9 + 27 + 288 + 9 = 333$ brojeva s traženim svojstvom.

Treba još izračunati zbroj brojeva manjih od 10000 kojima su točno tri znamenke jednake, a znamenka jedinica im je jednaka 1.
Brojevi koje treba zbrojiti mogu imati točno tri jedinice ili točno jednu jedinicu.

Ako su točno tri jedinice računamo zbroj brojeva oblika

$$111, \quad 1101, \quad 1011, \quad \overline{11x1}, \quad \overline{1x11}, \quad \overline{x111},$$

gdje je $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Zbroj prva tri broja iznosi 2223. Preostale brojeve možemo zbrajati kao

$$1000 \cdot (1+1+x) + 100 \cdot (1+1+x) + 10 \cdot (1+1+x) + 3 \cdot 1 = 1110 \cdot (2+x) + 3,$$

za sve brojeve $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Kako je $2+3+4+5+6+7+8+9 = 44$, slijedi

$$[1110 \cdot (2+2)+3] + [1110 \cdot (2+3)+3] + \cdots + [1110 \cdot (2+9)+3] = 1110 \cdot (8 \cdot 2 + 44) + 8 \cdot 3 = 66624.$$

Ako je točno jedna jedinica, dakle samo ona koja je na mjestu jedinica, brojevi su oblika $\overline{xxx1}$, $x \neq 0, 1$. Njihov je zbroj

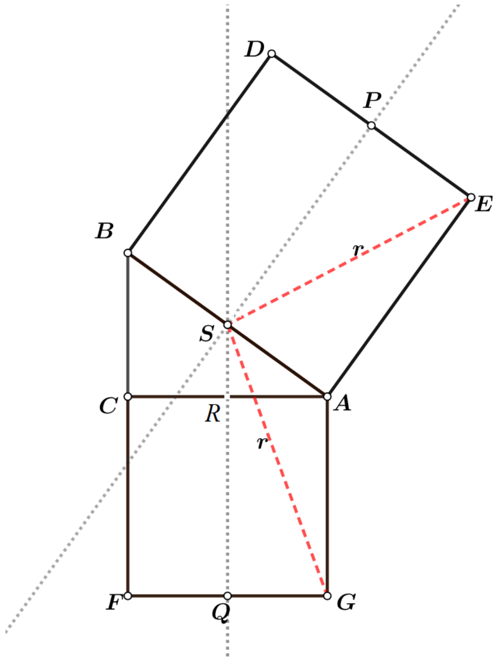
$$2221 + 3331 + \cdots + 9991 = 44 \cdot 1110 + 8 \cdot 1 = 48848.$$

Ukupan zbroj je $2223 + 66624 + 48848 = 117695$.

Zadatak B-1.5.

U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina hipotenuze je 12. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $ACGF$. Ako točke D, E, F i G leže na istoj kružnici, izračunajte opseg trokuta ABC.

Rješenje.



Neka je $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$.

Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{FG}$ su tetive kružnice, pa se njihove simetrale sijeku u središtu dane kružnice. Simetrala dužine $\overline{DE}$ siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki S. Simetrala dužine $\overline{FG}$ paralelna je sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC te siječe katetu $\overline{AC}$ u polovištu R.

Tada zbog Talesovog poučka o proporcionalnim dužinama, (ili sličnosti trokuta ASR i ABC) hipotenuzu siječe u polovištu, odnosno točki S.
(Ovaj se zaključak može izvesti i iz činjenice da su simetrale stranica $\overline{DE}$ i $\overline{FG}$ ujedno i simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a simetrale stranica u pravokutnom trokutu sijeku se u polovištu hipotenuze.)

Zaključujemo da se središte kružnice nalazi u polovištu hipotenuze i da je $|RS| = \dfrac{a}{2}$. Tada je $|SE| = |SG| = r$. Pitagorin poučak primijenjen na trokut SAE nam daje

$$\begin{aligned}
&|SA|^2 + |AE|^2 = |SE|^2 \\
&\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2 = r^2 \\
&r^2 = 36 + 144 = 180.
\end{aligned}$$

U trokutu GQS vrijedi $|SQ|^2 + |QG|^2 = |GS|^2$ odnosno

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 = 180 \\
&\frac{a^2}{4} + ab + b^2 + \frac{b^2}{4} = 180 \\
&ab + b^2 = 144.
\end{aligned}$$

Kako je $a^2 + b^2 = 144$ (Pitagorin poučak u trokutu ABC), slijedi $ab - a^2 = 0$, tj. $a(b - a) = 0$.

Ovo je moguće samo ako je $a = b$. Tada je $2a^2 = 144$ te $a = 6\sqrt{2}$.

Opseg trokuta ABC iznosi $o = a + b + c = 2a + c = 12\sqrt{2} + 12$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-2.1.

Koliko je $1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019}$, ako je $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$?

Prvo rješenje.

Izračunajmo redom

$$\begin{aligned}
&z^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}\,i - 2}{4} = \frac{\sqrt{3}\,i - 1}{2}\\
&z^3 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\,i - 1}{2} = \frac{-3-1}{4} = -1\\
&z^4 = -z\\
&z^6 = z^4 \cdot z^2 = -z^3 = 1\\
&z^8 = z^6 \cdot z^2 = z^2, \quad z^{10} = z^6 \cdot z^4 = z^4 = -z, \quad z^{12} = 1, \ \ldots
\end{aligned}$$

Svake tri uzastopne parne potencije broja z imaju iste vrijednosti kao

$$z^0 = 1, \quad z^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z^4 = -z,$$

pa je

$$\begin{aligned}
1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019} &= (1 + z^2 - z) + (1 + z^2 - z) + \cdots + (1 + z^2 - z) + z^{2\cdot 2019}\\
&= 673 \cdot (1 + z^2 - z) + 1 = 673 \cdot \left(1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Potencije broja z računamo kao i u prvom rješenju.

Primijenimo formulu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, odnosno formulu

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

na izraz $1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019}$ za $a = 1$, $b = z^2$, $n = 2020$.

Tada je

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019} = \frac{1^{2020} - (z^2)^{2020}}{1 - z^2} = \frac{1 - z^{4040}}{1 - z^2} = \frac{1 - z^2}{1 - z^2} = 1,$$

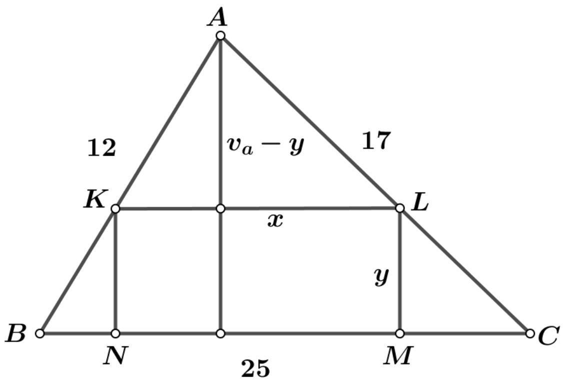
jer je $4040 = 3 \cdot 1346 + 2$, pa je $z^{4040} = z^2$.

Zadatak B-2.2.

U trokutu ABC je $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|BC| = 25\,\text{cm}$, $|CA| = 17\,\text{cm}$. Trokutu je upisan pravokutnik $KLMN$ tako da su vrhovi M i N na stranici $\overline{BC}$, vrh K na stranici $\overline{AB}$, a vrh L na stranici $\overline{CA}$.

Odredite duljine stranica pravokutnika ako je njegova površina jednaka $\dfrac{216}{5}$.

Rješenje.



Pomoću Heronove formule možemo odrediti površinu trokuta ABC, a zatim i visinu na stranicu $\overline{BC}$

$$s = \frac{12+25+17}{2} = 27 \implies P = \sqrt{27 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 2} = 90$$

$$v_a = \frac{2P}{|BC|} = \frac{36}{5}.$$

Koristeći sličnost trokuta AKL i ABC (KK) dobivamo

$$v_a : (v_a - y) = |BC| : x$$

$$\frac{36}{5} : \left(\frac{36}{5} - y\right) = 25 : x$$

$$y = \frac{900 - 36x}{125}.$$

Kako je površina pravokutnika $P = xy$ slijedi

$$x \cdot \frac{900-36x}{125} = \frac{216}{5}$$

što nakon sređivanja daje kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 25x + 150 = 0.$$

Njezina su rješenja $x = 10$ i $x = 15$. Tada je $y = \frac{108}{25} = 4.32$ odnosno $y = \frac{72}{25} = 2.88$.

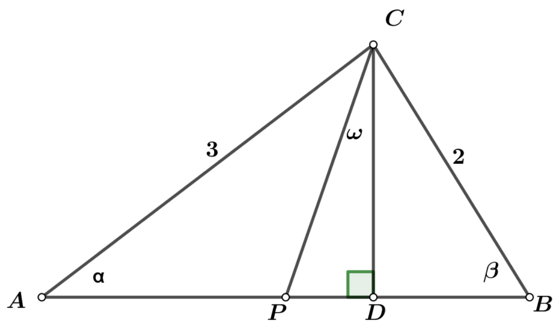
Dakle, zadane uvjete zadovoljavaju dva pravokutnika, jedan sa stranicama duljine 10 i 4.32, a drugi sa stranicama duljine 15 i 2.88.

Zadatak B-2.3.

U trokutu ABC je $|BC| = 2\,\text{cm}$, $|AC| = 3\,\text{cm}$ i $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB$.

Ako je kut između težišnice i visine povučene iz vrha C jednak ω, koliko je $\cos 2\omega$?

Rješenje.



Neka je D nožište visine povučene iz vrha C. Iz trokuta ADC računamo

$$|AD| = b\cdot\cos\alpha = 3\cdot\frac{7}{8} = \frac{21}{8}\,\text{cm}.$$

Visinu možemo izračunati pomoću Pitagorinog poučka

$$v = \sqrt{9 - \left(\frac{21}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{8}\,\text{cm},$$

a tako računamo i $|DB|$

$$|DB| = \sqrt{4 - \left(\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)^2} = \frac{11}{8}\,\text{cm}.$$

Tada je

$$|AB| = |AD| + |DB| = \frac{21}{8} + \frac{11}{8} = 4\,\text{cmcm}.$$

Trokut CPB ima dvije stranice jednake pa je kut $\sphericalangle PCB = \sphericalangle CPB = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$.

Sada je $\sphericalangle PCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta}{2}$.

Stoga je $\cos 2\omega = \cos\beta$, a iz trokuta CDB slijedi

$$\cos\beta = \frac{\frac{11}{8}}{2} = \frac{11}{16}.$$

Zadatak B-2.4.

Neka je $f(x) = |x-4|\,(|x| - 2)$.

Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije f na intervalu $[-2, 5]$. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja?

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti razmatrajući graf zadane funkcije.

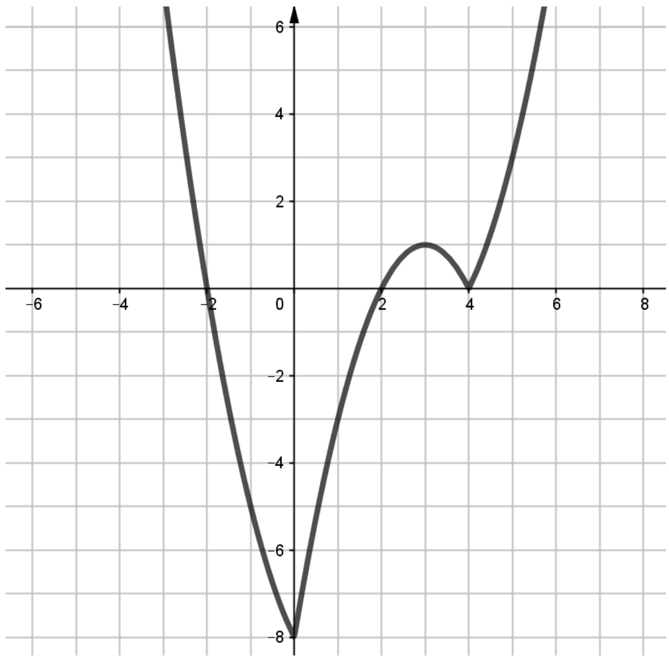
Zapišimo funkciju bez znaka apsolutne vrijednosti i nacrtajmo njezin graf.

$$\begin{aligned}
x \leqslant 0 &\implies f(x) = |x-4|(|x|-2) = (-x+4)(-x-2) \\
0 \leqslant x \leqslant 4 &\implies f(x) = (-x+4)(x-2) \\
x \geqslant 4 &\implies f(x) = (x-4)(x-2)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{za } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{za } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Tada je grafički prikaz funkcije sljedeći.



Graf dane funkcije sastoji se od dijelova tri parabole (grafova tri kvadratne funkcije f_1, f_2 i f_3) koje se "lome" u točkama $x = 0$ i $x = 4$.

Na intervalu od $x = -2$ do $x = 0$ vrijednost funkcije f_1 pada, zatim od $x = 0$ do $x = 3$ vrijednost funkcije f_2 raste (od prve točke loma do njezina tjemena), a pada od $x = 3$ do $x = 4$ (od tjemena do druge točke loma) te na kraju na intervalu od $x = 4$ do $x = 5$ funkcija f_3 raste (od točke loma do ruba zadanog intervala).

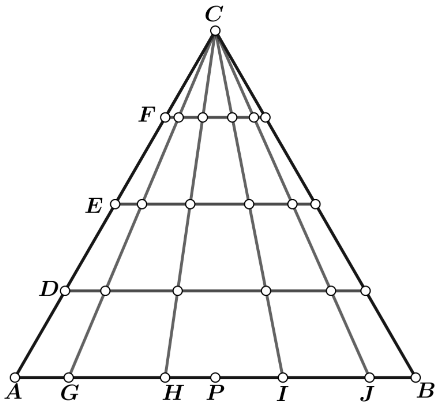
Uočimo da minimalnu ili maksimalnu vrijednost naše funkcije treba tražiti među rubnim točkama zadanog intervala, u točkama u kojima se graf "lomi" ili tjemenu.

Vidimo da će funkcija f imati maksimalnu vrijednost na zadanom intervalu za $x = 5$ i maksimum iznosi $f(5) = 3$, a minimalnu vrijednost postiže za $x = 0$, a iznosi $f(0) = -8$.

Jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja ako je $m \in (-8, 0) \cup (1, \infty)$.

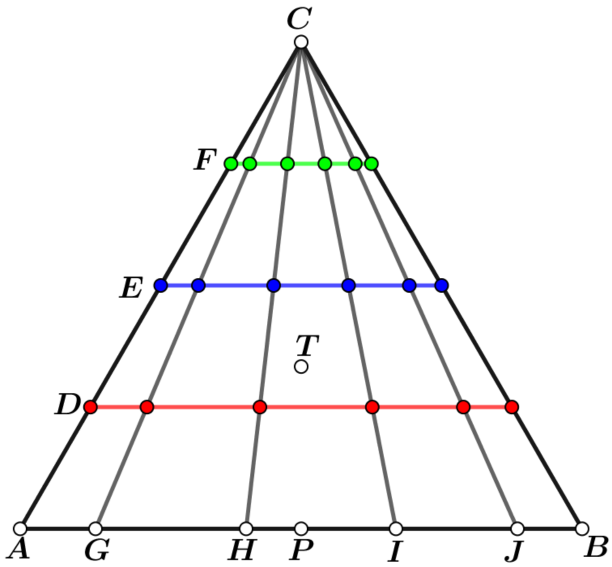
Zadatak B-2.5.

U jednakostraničnom trokutu ABC polovište stranice $\overline{AB}$ je točka P. Točke G i H su između točaka A i P, a točke I i J između točaka P i B. Točke D, E i F dijele dužinu $\overline{AC}$ na četiri jednaka dijela. Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{AB}$. Promatramo sve trokute kojima je jedan vrh u točki C, a preostala dva na jednoj od konstruiranih paralela sa stranicom $\overline{AB}$, uključujući $\overline{AB}$ i to u točkama presjeka sa spojnicama AC, GC, HC, IC, JC ili BC.



Ako je ukupan broj takvih trokuta jednak x, a ukupan broj takvih trokuta koji ne sadrže težište T jednak y, odredite omjer $x : y$.

Rješenje.



Neka je stranica $\overline{AB}$ obojana crno, paralela kroz D crveno, paralela kroz E plavo, a paralela kroz F zeleno. Težište T nalazi se na težišnici $\overline{CP}$ i to između plave i crvene paralele jer je dijeli u omjeru $2 : 1$ od vrha C.

Prebrojimo trokute čija je stranica nasuprot vrhu C crne boje.

Na dužini $\overline{AB}$ moramo od 6 točaka A, G, H, I, J i B izabrati dvije točke.

Ako izaberemo točku A, onda se druga točka može odabrati na 5 načina.

Ako izaberemo točku G, onda se druga točka može odabrati na 4 načina (bez točke A jer je trokut CGA uključen u prethodni slučaj).
Ako izaberemo točku H, onda se druga točka može odabrati na 3 načina.
Ako izaberemo točku I, onda se druga točka može odabrati na 2 načina.
Ako izaberemo točku J, onda se druga točka može odabrati na 1 način.

Dakle, takvih je 15 trokuta.

Isto toliko imamo trokuta čija je jedna stranica crvena, plava ili zelena. Zato je ukupan broj trokuta $4 \cdot 15 = 60$.

Sada ćemo izračunati koliko trokuta sadrži točku T. Takvi trokuti moraju jednu stranicu imati ili crnu ili crvenu.
Ako izaberemo jedan vrh u točki A, onda drugi vrh mora biti I, J ili B.
Analogno, ako je jedan vrh u točki G ili H, imamo po tri mogućnosti za drugi vrh.
Dakle, broj trokuta koji sadrže točku T s jednom crnom stranicom je $3 + 3 + 3 = 9$, a isto ih je toliko sa crvenom stranicom.

Ukupno 18 trokuta sadrži točku T, a $60 - 18 = 42$ trokuta ne sadrži točku T.

Traženi omjer je $60 : 42 = 10 : 7$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|4^{x-1}-1\right| + 4^x \log_x \sqrt{x}$$

u skupu realnih brojeva.

Rješenje.

Da bi svi izrazi bili definirani, mora vrijediti $x>0$ i $x \neq 0$. Uz taj uvjet i svojstva logaritma zadana je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbama

$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|4^{x-1}-1\right| + 4^x \cdot \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|\frac{1}{4} \cdot 4^x - 1\right| + \frac{1}{2} \cdot 4^x$$

Uvedimo supstituciju $t=4^x$. Zbog $x>0$, $x \neq 1$ vrijedi $t>1$ i $t \neq 4$.

Slijedi $\sqrt{t+1} \geqslant \left|\frac{1}{4}t-1\right| + \frac{1}{2}t,$

a nakon množenja s 4 dobivamo

$$\sqrt{16t+16} \geqslant |t-4| + 2t. \qquad (*)$$

Prvi slučaj. Neka je $1<t<4$.

Tada imamo $\sqrt{16t+16} \geqslant -t+4+2t$, odnosno $\sqrt{16t+16} \geqslant t+4$.

Kako je $t+4>0$, kvadriranje je dozvoljeno pa slijedi $16t+16 \geqslant t^2+8t+16$, odnosno $t^2-8t \leqslant 0$.

Kako je $t>1$ dobivamo $t \leqslant 8$ što znači da je svaki t za koji vrijedi $1<t<4$ rješenje nejednadžbe (*).

Zadanu nejednadžbu zadovoljavaju svi x za koje je $1<4^x<4$ odnosno $0<x<1$.

Drugi slučaj. Neka je $t>4$.

Tada dana nejednakost postaje $\sqrt{16t+16} \geqslant t-4+2t$, odnosno $\sqrt{16t+16} \geqslant 3t-4$.

Ako je $t>4$, onda je $3t-4>0$ pa je kvadriranje dozvoljeno.

Dobivamo $16t+16 \geqslant 9t^2-24t+16$, odnosno $9t^2-40t \leqslant 0$. Slijedi $9t-40 \leqslant 0$ te $4<t \leqslant \frac{40}{9}$.

Tada je $4<4^x \leqslant \frac{40}{9}$ tj. $1<x \leqslant \log_4 \frac{40}{9}$.

Konačno rješenje je $x \in \langle 0,1\rangle \cup \left\langle 1, \log_4 \frac{40}{9}\right]$.

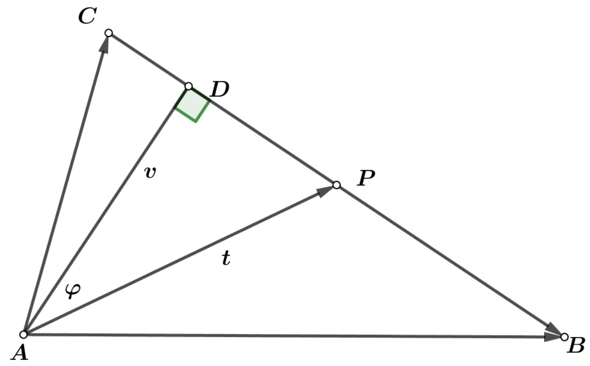
Zadatak B-3.2.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od $60°$. Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a}+4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a}+2\vec{b}$, izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha A u trokutu ABC.

Prvo rješenje.

Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, tada je

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-\vec{a} + 4\vec{b}) - (-3\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = (-3\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$



Izračunajmo duljine tih vektora, odnosno duljine stranica trokuta ABC i duljinu težišnice $\overline{AP}$. Pri tome ćemo koristiti činjenicu da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Slijedi

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 7,$$
$$\left|\overrightarrow{CB}\right|^2 = \left(2\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 4|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 12,$$
$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 7.$$

Dakle $|AC| = |AP| = \sqrt{7}$, $|CB| = 2\sqrt{3}$.

Kako je trokut APC jednakokračan, vrijedi

$|AD|^2 = |AP|^2 - \left(\frac{1}{4}|BC|\right)^2 = 7 - \frac{12}{16} = \frac{25}{4}$, te je $|AD| = \frac{5}{2}$.

Zato je $\cos\varphi = \dfrac{|AD|}{|AP|} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Neka je λ takav da je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CB} = (2\lambda - 3)\vec{a} + (2 + 2\lambda)\vec{b}$.

Kako je $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ vrijedi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ odnosno

$$(2\lambda - 3)\vec{a}^2 + (4\lambda - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (2 + 2\lambda)\vec{b}^2 = 0.$$

Kako je $\vec{a}^2 = 1$, $\vec{b}^2 = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}$, slijedi

$$(2\lambda - 3) + (4\lambda - 1) \cdot \frac{1}{2} + (2 + 2\lambda) = 0$$

odakle dobivamo $\lambda = \frac{1}{4}$. Dakle, $\overrightarrow{AD} = -\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}$.

Konačno imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(-\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}\right) \\
&= 5|\vec{a}|^2 - \frac{25}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{15}{2}|\vec{b}|^2 = 5 - \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = \frac{25}{4} \\
|\overrightarrow{AP}|^2 &= \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 7, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{7} \\
|\overrightarrow{AD}|^2 &= \left(-\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad |\overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2} \\
\cos\varphi &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.
\end{aligned}$$

Zadatak B-3.3.

Dokažite da vrijednost funkcije $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ nije u intervalu $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$ niti za jedan realni broj x za koji je funkcija definirana.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) &= \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \\
&= \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

Sada zapišimo funkciju $f(x) = \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 2x$ koristeći dobiveni izraz i formulu za tangens dvostrukog kuta.

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2}.$$

Uvođenjem zamjene $\operatorname{tg}^2 x = t$ dobivamo $f(x) = \dfrac{3-t}{1-3t} \cdot \dfrac{1-t}{2}$.

Treba dokazati da $f(x)$ ne može poprimiti niti jednu vrijednost iz intervala $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neki realni broj x iz domene funkcije f vrijedi $\dfrac{1}{9} < f(x) < \dfrac{3}{2}$.

Rješavamo sustav nejednadžbi

$$\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} > \frac{1}{9}, \qquad \frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} < \frac{3}{2}.$$

Riješimo prvu nejednadžbu.

$$\begin{aligned}
&\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} > \frac{1}{9} \\
&\frac{9(3-4t+t^2) - 2(1-3t)}{2(1-3t)} > 0 \\
&\frac{(3t-5)^2}{2(1-3t)} > 0
\end{aligned}$$

Kako brojnik nije nikada negativan, nazivnik mora biti pozitivan pa je $t < \frac{1}{3}$.

Druga nejednadžba je ekvivalentna s

$$\begin{aligned}
&\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} < \frac{3}{2} \\
&\frac{3-4t+t^2 - 3(1-3t)}{2(1-3t)} < 0 \\
&\frac{t^2+5t}{2(1-3t)} < 0.
\end{aligned}$$

Kako broj t mora zadovoljavati obje nejednadžbe, zbog $t < \frac{1}{3}$ nazivnik mora biti pozitivan pa dobivamo $-5 < t < 0$. Kako je $t = \operatorname{tg}^2 x$, ova nejednadžba nema rješenja.

Stoga ne postoji realni broj x iz domene funkcije f takav da vrijedi $\dfrac{1}{9} < f(x) < \dfrac{3}{2}$.

Dakle, za svaki x za koji je $f(x)$ definiran, funkcija ima vrijednost izvan intervala $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dolazimo do izraza $f(x) = \dfrac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2}$. Uvodimo zamjene $t = \operatorname{tg}^2 x$ i $y = f(x)$.

Dobivenu jednadžbu $y = \dfrac{3-t}{1-3t} \cdot \dfrac{1-t}{2}$ možemo zapisati kao kvadratnu po t:

$$t^2 - 2(2-3y)t + (3-2y) = 0. \tag{$*$}$$

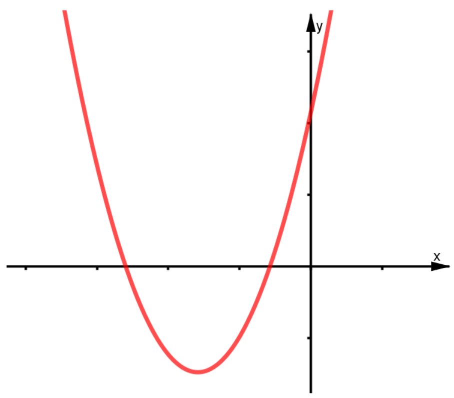
Budući da je $t = \operatorname{tg}^2 x$, jednadžba (*) može imati samo nenegativna realna rješenja.

Za one y za koje jednadžba (*) ima rješenja, postoje realni x za koje dana funkcija ima vrijednost y. Tražimo, dakle, one vrijednosti y za koje jednadžba (*) nema realna rješenja ili su joj oba rješenja negativna.

U prvom slučaju, jednadžba nema realna rješenja, a to znači da joj je diskriminanta negativna: $(2(2-3y))^2 - 4(3-2y) < 0$.

Sređivanjem dobivamo kvadratnu nejednadžbu $9y^2 - 10y + 1 < 0$ čija su rješenja $y \in \left\langle \dfrac{1}{9}, 1 \right\rangle$.

U drugom slučaju kvadratna jednadžba (*) dva negativna rješanja, a to znači da graf pripadne kvadratne funkcije mora imati oblik kao na slici



što će se ostvariti ako je $-\frac{b}{2a} < 0$, $c > 0$ i $b^2 - 4ac \geqslant 0$, gdje su a, b i c redom koeficijenti kvadratnog, linearnog i slobodnog člana. Tako dobivamo sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} 2-3y < 0 \\ 3-2y > 0 \\ 9y^2 - 10y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je $y \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right\rangle$.

Konačno, unija skupova rješenja u promatrana dva slučaja $\left\langle \frac{1}{9}, 1 \right\rangle \cup \left[1, \frac{3}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{9}, \frac{3}{2} \right\rangle$ daje interval u kojem funkcija se ne nalazi nijedna vrijednost $y = f(x)$, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak B-3.4.

Klara je čekajući u redu za ulaznice kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999.

Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Klara takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

Rješenje.

Klarin broj je $N = 12456789101112141516\ldots999799989999$.

Kako bismo izračunali ukupan broj znamenaka broja N moramo odrediti koliko je prirodnih brojeva manjih od 10000 koji ne sadrže znamenku 3 u svom zapisu.

Na početku je 8 jednoznamenkastih brojeva: $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Dvoznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 = 72$ jer prvu znamenku možemo odabrati na 8 načina (ne može biti 0 ni 3), a drugu na 9 (ne može biti 3, ali može biti 0). To nam daje $2 \cdot 72 = 144$ znamenke u nizu.

Analogno, troznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Time dobivamo 1944 znamenke u nizu.

Četveroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ što daje 23328 znamenaka.

Dakle broj N ima ukupno $8 + 144 + 1944 + 23328 = 25424$ znamenaka.

Treba još odrediti 2019. znamenku po redu.

U trenutku kad smo ispisali sve troznamenkaste brojeve s traženim svojstvom, zapisali smo $8 + 144 + 1944 = 2096$ znamenki. To znači da je 2096. po redu zadnja znamenka broja 999, pa ćemo 2019. znamenku tražiti među troznamenkastim brojevima.

Dakle, treba se vratiti $2096\breve{\ }2019 = 77$ znamenki unazad, što je 25 troznamenkastih brojeva i još dvije znamenke. Kako od 990 do 999, od 980 do 989 i od 970 do 979 ima po 9 brojeva koji ne sadrže znamenku 3, vratimo li se 27 brojeva unazad doći ćemo do zadnje znamenke broja 969. Kako je $2096 - 3 \cdot 9 = 2015$, ta je znamenka 2015. po redu.

Sljedeće tri znamenke su znamenke broja 970 pa 2019. po redu prva znamenka broja 971, dakle znamenka 9.

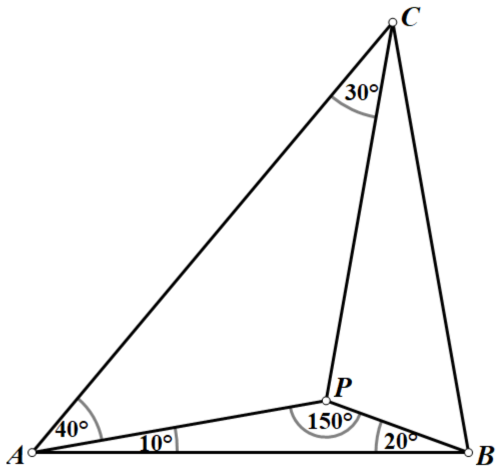
Zadatak B-3.5.

Ako unutar trokuta ABC postoji točka P takva da je

$$\sphericalangle PAB = 10^\circ, \quad \sphericalangle PBA = 20^\circ, \quad \sphericalangle PCA = 30^\circ, \quad \sphericalangle PAC = 20^\circ,$$

dokažite da je trokut ABC jednakokračan.

Rješenje.



Primijenimo li poučak o sinusima na trokut PAB dobivamo:

$$|PA| = |AB| \frac{\sin 10^\circ}{\sin 150^\circ} = |AB| \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} = 2|AB| \sin 10^\circ$$
$$|PB| = |AB| \frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ} = 2|AB| \sin 20^\circ.$$

Primijenimo li poučak o sinusima na trokut PAC dobivamo:

$$\begin{aligned}
|PC| = |PA| \frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} &= 4|AB| \sin 20^\circ \sin 40^\circ \\
&= 2|AB|(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = 2|AB| \left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right) \\
&= 2|AB| \left(1 - 2\sin^2 10^\circ - \frac{1}{2}\right) = 2|AB| \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right).
\end{aligned}$$

U trokutu PCB vrijedi:

$$\begin{aligned}
|BC|^2 &= |PB|^2 + |PC|^2 - 2|PB| \cdot |PB| \cos 100^\circ \\
&= 4|AB|^2 \sin^2 10^\circ + 4|AB|^2 \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right)^2 + 8|AB|^2 \sin^2 10^\circ \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right) \\
&= |AB|^2 \left(4\sin^2 10^\circ + (1 - 8\sin^2 10^\circ + 16\sin^4 10^\circ) + (4\sin^2 10^\circ - 16\sin^4 10^\circ)\right) \\
&= |AB|^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $|BC| = |AB|$ pa je trokut ABC jednakokračan.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-4.1.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Rješenje.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. Provjerimo da tvrdnja zadatka vrijedi za $n=1$.

Za $n=1$ je $2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Korak indukcije. Treba, koristeći pretpostavku, pokazati da tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$ odnosno da je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

Neka je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ korijena}} = u$.

Kvadriranjem dobivamo $2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = u^2$ (*)

Koristeći prepostavku indukcije iz (*) dobivamo $2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = u^2$ odnosno

$$2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = u^2. \qquad (**)$$

Primijenimo li na (**) formulu za kosinus polovine argumenta $(1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2})$ dobivamo $2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}} = u^2$ odakle slijedi $u = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$, čime je dokazano da tvrdnja vrijedi i za $n+1$.

Po principu matematičke indukcije dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Zadatak B-4.2.

Realne funkcije $f \circ g$ i f zadane su pravilima pridruživanja

$$(f \circ g)(x) = 2^{4^{4^{\sin x}}} \quad \text{i} \quad f(x) = 4^{8^{-2^x}}.$$

Odredite pravilo pridruživanja kojim je zadana funkcija g i njezino područje definicije.

Rješenje.

Vrijedi $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4^{8^{-2^{g(x)}}}$. Zato je

$$4^{8^{-2^{g(x)}}} = 2^{4^{4^{\sin x}}}.$$

Slijedi redom

$$\begin{aligned}
2^{2 \cdot 8^{-2^{g(x)}}} &= 2^{4^{4^{\sin x}}} \\
2 \cdot 8^{-2^{g(x)}} &= 4^{4^{\sin x}} \\
2 \cdot 2^{-3 \cdot 2^{g(x)}} &= 2^{2 \cdot 4^{\sin x}} \\
2^{1-3 \cdot 2^{g(x)}} &= 2^{2 \cdot 4^{\sin x}} \\
1 - 3 \cdot 2^{g(x)} &= 2 \cdot 4^{\sin x} \\
1 - 3 \cdot 2^{g(x)} &= 2 \cdot 2^{2 \sin x} \\
1 - 3 \cdot 2^{g(x)} &= 2^{1+2 \sin x} \\
3 \cdot 2^{g(x)} &= 1 - 2^{1+2 \sin x} \\
2^{g(x)} &= \frac{1}{3}\left(1 - 2^{1+2 \sin x}\right) \\
g(x) &= \log_2 \frac{1 - 2^{1+2 \sin x}}{3}.
\end{aligned}$$

Odredimo domenu funkcije g.

Iz uvjeta $\dfrac{1 - 2^{1+2 \sin x}}{3} > 0$ redom slijedi $2^{1+2 \sin x} < 1$, $1 + 2 \sin x < 0$, $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Konačno, $x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$.

Zadatak B-4.3.

Odredite sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 - xy + y^2 = 2x - y.$$

Prvo rješenje.

Iz $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ dobivamo

$$x^2 - (y+2)x + y^2 + y = 0. \tag{$*$}$$

Kako tražimo cjelobrojna rješenja, diskriminanta kvadratne jednadžbe (*) mora biti nenegativna, dakle $(y+2)^2 - 4(y^2+y) \geqslant 0$ odakle sređivanjem dobivamo $-3y^2 + 4 \geqslant 0$.

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $y \in \langle \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rangle$, a kako tražimo cjelobrojna rješenja, y može poprimiti vrijednosti -1, 0 i 1.

Uvrštavanjem $y = -1$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - x$, s rješenjima $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(0, -1)$ i $(1, -1)$.

Uvrštavanjem $y = 0$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - 2x = 0$ čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(0, 0)$ i $(2, 0)$.

Konačno, uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - 3x + 2 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(1, 1)$ i $(2, 1)$.

Drugo rješenje.

Iz $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ redom dobivamo

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 2xy + 2y^2 = 4x - 2y,\\
&(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 0,\\
&(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.
\end{aligned}$$

Kako se traže $x, y \in \mathbb{Z}$, brojevi $x - y$, $x - 2$ i $y + 1$ su cijeli. Zbroj kvadrata tri cijela broja jednak je 5 ako i samo ako su ti kvadrati jednaki 0, 1 i 4 u nekom poretku.

Imamo sljedeće mogućnosti:

1° $\quad x - y = 0$, $x - 2 = \pm 1$, $y + 1 = \pm 2$.

Tada je $x = y$, $x \in \{1, 3\}$, $y \in \{1, -3\}$ pa je jedino rješenje $(x, y) = (1, 1)$.

2° $\quad x - y = 0$, $x - 2 = \pm 2$, $y + 1 = \pm 1$.

Tada je $x = y$, $x \in \{0, 4\}$, $y \in \{0, -2\}$ pa je jedino rješenje $(x, y) = (0, 0)$.

3° $\quad x - 2 = 0$, $y + 1 = \pm 1$, $x - y = \pm 2$.

Tada je $x = 2$, $y \in \{0, -2\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (2, 0)$.

4° $\quad x - 2 = 0$, $y + 1 = \pm 2$, $x - y = \pm 1$.

Tada je $x = 2$, $y \in \{1, -2\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (2, 1)$.

5° $\quad y + 1 = 0$, $x - 2 = \pm 1$, $x - y = \pm 2$.

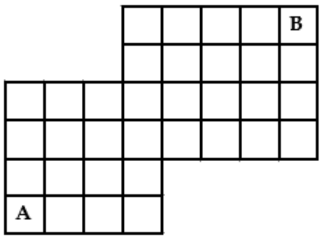
Tada je $y = -1$, $x \in \{1, 3\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (1, -1)$.

6° $\quad y + 1 = 0$, $x - 2 = \pm 2$, $x - y = \pm 1$.

Tada je $y = -1$, $x \in \{0, 4\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (0, -1)$.

Zadatak B-4.4.

Na igraćoj ploči prikazanoj na slici Ivan treba doći od polja A do polja B. Pritom iz pojedinog polja smije prijeći samo na polje koje je neposredno desno ili neposredno iznad njega. Na koliko načina Ivan može doći od polja A do polja B?

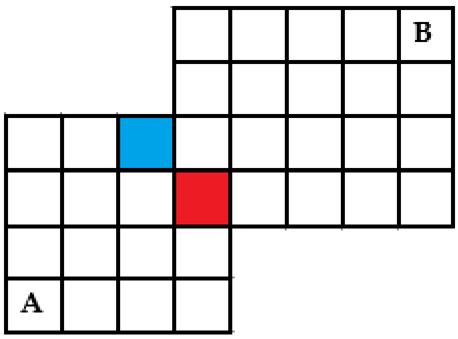


Prvo rješenje.

Krenemo li iz polja A, u polje koje je neposredno desno možemo doći samo na jedan način, a tako i u sva ostala polja u tom redu te stupcu iznad polja A. Broj načina na koliko možemo doći u neko od ostalih polja jednak je zbroju načina na koliko se može doći u polje koje je neposredno lijevo i neposredno ispod. Ako jedno od tih polja ne postoji broj načina jednak je broju načina na koji se može doći u prethodno polje (koje postoji). U tablici je prikazan broj načina (dobiven opisanim zbrajanjem) na koji se može doći u svako polje na igraćoj ploči.

Tako zaključujemo da je ukupan broj načina da se iz polja A dođe u polje B jednak 500.

			20	70	160	300	**500**
			20	50	90	140	200
1	4	10	20	30	40	50	60
1	3	6	10	10	10	10	10
1	2	3	4				
A	1	1	1				



Drugo rješenje.

Na putu od polja A do polja B Ivan mora proći ili kroz crveno polje ili kroz plavo polje.

Iz polja A u plavo polje mora doći u pet pomaka, od kojih su dva horizontalna, a tri vertikalna. Od pet pomaka dva horizontalna možemo odabrati na $\binom{5}{2} = 10$ načina.

Iz polja A u crveno polje mora doći također u pet pomaka, od kojih su tri horizontalna, a dva vertikalna, odnosno na $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ načina.

Od plavog polja prvo mora ići u polje neposredno desno, a od tog polja do polja B mora doći u 6 pomaka, od kojih je četiri u desno, a dva gore, što može napraviti na $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ načina.

Od crvenog polja do polja B mora doći u 7 pomaka, od kojih je četiri u desno, a tri gore, što može napraviti na $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$ načina.

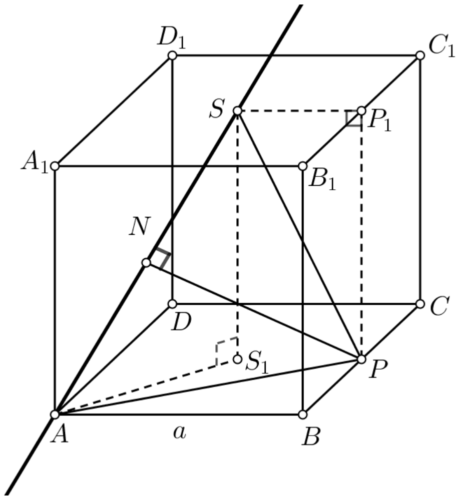
Ukupan je broj načina jednak $\binom{5}{2}\binom{7}{4} + \binom{5}{3}\binom{6}{2} = 10 \cdot 35 + 10 \cdot 15 = 500$ načina.

Zadatak B-4.5.

Duljina brida kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iznosi a. Odredite udaljenost od polovišta P brida $\overline{BC}$ do pravca koji prolazi vrhom A i središtem S stranice $A_1B_1C_1D_1$. Kolika je površina presjeka kocke ravninom APS ?

Rješenje.

Označimo sa N nožište okomice povučene iz točke P na pravac AS.



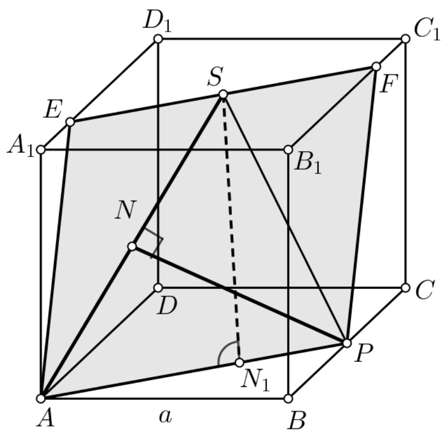
Uočimo $|AS|^2 = |AS_1|^2 + |S_1S|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{6a^2}{4}$ pa vrijedi $|AS| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Iz $|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ slijedi $|AP| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Slijedi da je trokut APS jednakokračan pa je $|AN| = \frac{1}{2}|AS| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Sada iz $|PN|^2 = |AP|^2 - |AN|^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{7a^2}{8}$ dobivamo $|PN| = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Uočimo da ravnina APS siječe brid $\overline{A_1D_1}$ u točki E i brid $\overline{B_1C_1}$ u točki F tako da je dužina $\overline{EF}$ usporedna s dužinom $\overline{AP}$ i jednake duljine pa slijedi da je četverokut $APFE$ paralelogram.



Površina paralelograma $APFE$ jednaka je $P_{APFE} = |AP| \cdot |SN_1| = 2P_{APS}$.

Vrijedi $P_{APS} = \frac{1}{2}|AS| \cdot |PN| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^2\sqrt{21}}{8}$

pa slijedi $P_{APFE} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{21}}{8} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4}$.